UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

57. BAND, 3. HEFT
MIT 10 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1953)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

57. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Sauer, R. Differenzengeometrie der infinitesimalen Flächenverbiegung . . 177

Weitzenböck, R. Zum Transversalenproblem I. 185

Wunderlich, W. Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien 199

Bukovics, E. Beiträge zur numerischen Integration I. 217

Hadwiger, H. Über Gitter und Polyeder 246

Buchbesprechungen 255

Differenzengeometrie der infinitesimalen Flächenverbiegung.*

Von

Robert Sauer, München.

(Eingelangt am 20. März 1953.)

Mit 3 Abbildungen.

Es liegt nahe, die Verbiegung von Flächenhäuten durch die Verknickung polyedrischer Häute mit starren Facetten differenzengeometrisch darzustellen; vgl. z. B. [1], [2]. Dabei zeigt sich jedoch, daß die „Freiheitsgrade" bei der Verknickung polyedrischer Häute und bei der Verbiegung von Flächenhäuten im allgemeinen nicht miteinander übereinstimmen und daß daher die differenzengeometrischen Sätze über polyedrische Häute und die differentialgeometrischen Sätze über Flächenhäute nicht analog sind. So ist beispielsweise eine Dreieckshaut (Abb. 1) „stärker" deformierbar als eine Flächenhaut: Bei den Verknickungen einer Dreieckshaut können zwei sich schneidende Polygone (in Abb. 1 stark ausgezogen) unabhängig voneinander in gewissen Grenzen willkürlich deformiert werden, bei den Verbiegungen einer Flächenhaut dagegen kann man i. a. nur die Deformation einer einzigen Kurve vorschreiben.

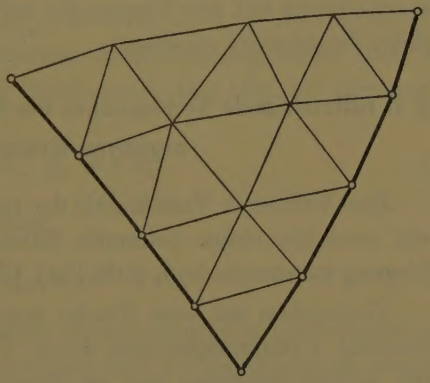

Abb. 1. Dreieckshaut.

Bei Viereckshäuten (Abb. 3), d. h. bei polyedrischen Häuten mit starren ebenen oder windschiefen Viereckfacetten, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

* Herrn Frank *Löbell* zum 60. Geburtstag am 11. 5. 1953 gewidmet.

a) Starre Viereckshäute, die überhaupt keine Verknickungen zulassen;

b) Viereckshäute, die eine einparametrige Menge von Verknickungen gestatten; sie sind also „schwächer" deformierbar als die Flächenhäute, ihre Verknickungen entsprechen nur einer einparametrigen Teilmenge der Verbiegungen einer Flächenhaut (Beispiel: Verbiegungen von Drehflächen in Drehflächen).

c) Ebeneckige Viereckshäute. Sie bestehen aus i. a. windschiefen Viereckfacetten mit der Nebenbedingung, daß die vier von jeder inneren Ecke der Viereckshaut ausgehenden Viereckseiten jeweils in einer Ebene liegen (z. B. die vier in Abb. 3 links stark ausgezogenen Seiten).

Diese ebeneckigen Viereckshäute sind i. a. starr. Sie lassen aber stets infinitesimale Verknickungen zu, und zwar mit denselben „Freiheitsgraden" wie die Flächenhäute negativen Krümmungsmaßes bei infinitesimalen Verbiegungen. Infolgedessen sind die ebeneckigen Viereckshäute ein brauchbares Modell zur differenzengeometrischen Darstellung der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung. Im folgenden wird die Differenzengeometrie der ebeneckigen Viereckshäute im Zusammenhang mit der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung in ihren Grundzügen dargelegt.

§ 1. Infinitesimale Verbiegungen der Asymptotenliniennetze einer Fläche negativen Krümmungsmaßes.

Zum leichteren Verständnis der nachfolgenden Ausführungen stellen wir zunächst einige bekannte Sätze über infinitesimale Flächenverbiegung zusammen (vgl. etwa [3a], [3b]):

Vorgegeben sei eine Fläche negativen (veränderlichen oder konstanten) Krümmungsmaßes durch $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$; die beiden Scharen der Asymptotenlinien sind als Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ genommen. Die infinitesimalen Verbiegungen

$$\vec{x}^{\varepsilon} = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{x}^{*}(u, v), \quad \varepsilon = \text{const}, \tag{1}$$

sind durch die Forderung

$$d\vec{x}^{\varepsilon}\, d\vec{x}^{\varepsilon} = d\vec{x}\, d\vec{x} + \varepsilon^2 \{\ldots\}, \text{ also } d\vec{x}\, d\vec{x}^{*} = 0, \tag{2}$$

gekennzeichnet. Hieraus folgt die Existenz eines Vektors $\vec{y}(u, v)$, der durch

$$d\vec{x}^* = \vec{y} \times d\vec{x} \tag{3}$$

definiert wird. Jedes Flächenelement der Fläche (x) erfährt beim Übergang zu dem entsprechenden Flächenelement der Fläche (x^ε) eine infinitesimale Drehung mit dem Drehvektor $\varepsilon \vec{y}$.

Aus Gl. (3) ergibt sich die Integrierbarkeitsbedingung

$$\vec{y}_u \times \vec{x}_v = \vec{y}_v \times \vec{x}_u \tag{4}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \vec{y}_u &= \mu(u,v)\,\vec{x}_u + \lambda(u,v)\,\vec{x}_v, \\ \vec{y}_v &= \nu(u,v)\,\vec{x}_u - \mu(u,v)\,\vec{x}_v. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus der Integrierbarkeitsbedingung der beiden letzten Gleichungen, nämlich

$$\mu\vec{x}_{uv} + \lambda\vec{x}_{vv} + \mu_v\vec{x}_u + \lambda_v\vec{x}_v = \nu\vec{x}_{uu} - \mu\vec{x}_{uv} + \nu_u\vec{x}_u - \mu_u\vec{x}_v,$$

erhält man nach skalarer Multiplikation mit $\vec{x}_u \times \vec{x}_v$ die Relation

$$\lambda N + 2\mu M - \nu L = 0, \tag{6}$$

welche die in Gl. (5) eingeführten Funktionen λ, μ, ν mit den zweiten Fundamentalgrößen $L=(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{uu})$, $M=(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{uv})$, $N=(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{vv})$ verknüpft. Da nun die Parameterkurven Asymptotenlinien sind, ist $L = N = 0$, $M \neq 0$ und Gl. (6) liefert $\mu=0$. Die Gln. (5) reduzieren sich sonach auf

$$\vec{y}_u = \lambda\vec{x}_v, \quad \vec{y}_v = \nu\vec{x}_u. \tag{7}$$

Hieraus folgt nach kurzer Rechnung

$$M^\varepsilon = (\vec{x}^\varepsilon_u, \vec{x}^\varepsilon_v, \vec{x}^\varepsilon_{uv}) = M + \varepsilon^2\{\ldots\}, \tag{8}$$

d. h. die Fundamentalgröße M eines Asymptotenliniennetzes bleibt bei beliebigen infinitesimalen Verbiegungen (bei Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen von ε) umgeändert.

Die Funktion M bestimmt zusammen mit den Funktionen der ersten Grundform $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ die Schränkung $1/p$ (= Grenzwert des Quotienten Winkel: kürzester Abstand) der Querregelflächen; diese werden von den Tangenten der Kurven u = const in den Punkten einer Kurve v = const., bzw. von den Tangenten der Kurven v = const in den Punkten einer Kurve u = const erzeugt. Wie in [3b] gezeigt wurde, ist nämlich

$$p = \begin{cases} \dfrac{4\,ME\,(EG - F^2)}{4\,EM^2 + (EG_u - FE_v)^2} \\ \\ \dfrac{4\,MG\,(EG - F^2)}{4\,GM^2 + (GE_v - FG_u)^2} \end{cases} \quad \text{für die Querregelflächen längs} \quad \begin{cases} u = \text{const}, \\ \\ v = \text{const}. \end{cases}$$

Hiernach kann man Gl. (8) auch folgendermaßen interpretieren: Die Schränkungen der Querregelflächen eines Asymptotenliniennetzes bleiben bei beliebigen infinitesimalen Verbiegungen (bei Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen von ε) ungeändert.

Unter der Voraussetzung $\lambda(u, v) \neq 0$, $\nu(u, v) \neq 0$ wird durch $\vec{y}$ als Ortsvektor eine Fläche $\vec{y}(u, v)$ definiert, die man wegen der durch Gl. (3) ausgedrückten kinematischen Beziehung als „Drehriß" der infinitesimalen Verbiegung (1) bezeichnet. Die Flächen (x) und (y) sind „parallel-reziprok" bezogen, d. h. sie sind in folgender Weise miteinander verknüpft (Abb. 2):

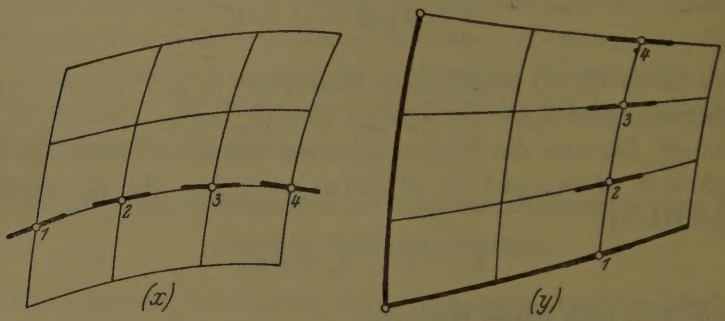

Abb. 2 Asymptotenliniennetz und Drehriß

Die Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sind auf (x) Asymptotenlinien und erzeugen auf (y) ein konjugiertes Netz; denn aus den Gl. (7) folgt

$$(\vec{y}_{uv}, \vec{y}_u, \vec{y}_v) = \lambda N = 0.$$

Ferner sind die Tangentenebenen der Flächen (x) und (y) in entsprechenden Punkten parallel, und zwar sind die „Längstangenten" einer Kurve $u = \text{const}$ oder einer Kurve $v = \text{const}$ der einen Fläche jeweils parallel zu den „Quertangenten" in den entsprechenden Punkten der anderen Fläche.

Wegen der Gegenseitigkeit der parallel-reziproken Beziehung kann auch (x) als Drehriß der Fläche (y) gedeutet werden; dadurch wird eine

infinitesimale Verbiegung der Fläche (y) gegeben, bei der das Netz der Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ konjugiert bleibt. Ein willkürlich vorgegebenes konjugiertes Kurvennetz kann dann und nur dann infinitesimal so verbogen werden, daß es konjugiert bleibt, wenn es zu einem Asymptotenliniennetz parallel-reziprok ist.

§ 2. Infinitesimale Verknickungen der ebeneckigen Viereckshäute.

Bei den in § 1 betrachteten Asymptotenliniennetzen fallen in jedem Punkt die Schmiegebenen der beiden sich dort schneidenden Netzkurven mit der Tangentenebene der Fläche zusammen. Es liegt daher nahe, diesen Asymptotenliniennetzen die ebeneckigen Viereckshäute gegenüberzustellen, bei denen in analoger Weise in jedem inneren Netzpunkt die „Schmiegebenen" der beiden sich dort schneidenden Netzpolygone miteinander zusammenfallen. Ebenso liegt es nahe, den infinitesimalen Verbiegungen der Asymptotenliniennetze, bei denen, wie gezeigt wurde, die Schränkungen der Querregelflächen erhalten bleiben, die infinitesimalen Verknickungen der ebeneckigen Viereckshäute zur Seite zu stellen; bei diesen Verknickungen bleiben die Vierecksfacetten starr und infolgedessen bleiben die Winkel und die kürzesten Abstände aufeinanderfolgender Geraden der den Querregelflächen analogen Querregelgestänge ungeändert.

Wir werden nun zeigen, daß die ebeneckigen Viereckshäute tatsächlich infinitesimal verknickbar sind, und werden gleichzeitig die Gesamtheit ihrer infinitesimalen Verknickungen angeben:

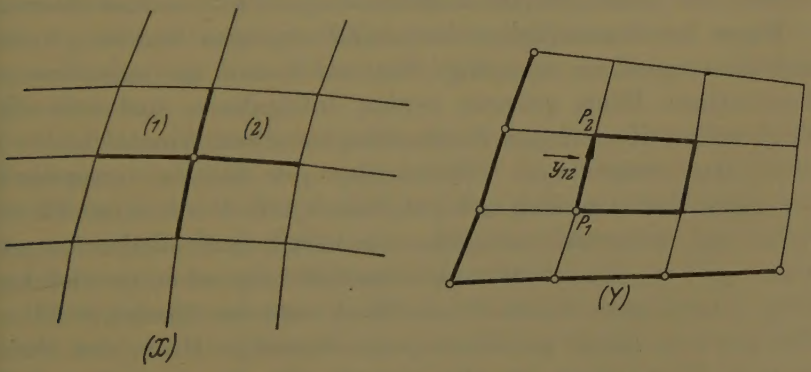

Abb. 3 Ebeneckige Viereckshaut und Drehriß

Zu einer vorgegebenen ebeneckigen Viereckshaut lassen sich unendlich viele parallel-reziprok bezogene ebenfacettige Viereckshäute

angeben (Abb. 3): Nach Art der Zuordnung von Lageplan und Kräfteplan eines Fachwerks sind beide Häute durch einander entsprechende parallele Strecken aufeinander bezogen. Dabei werden den vier in einer inneren Ecke der einen Haut sich schneidenden Strecken jeweils die vier Seiten eines Vierecks der anderen Haut zugeordnet. Den ebenen Kreuzen der vorgegebenen Haut entsprechen also ebene Viereckfacetten der anderen Haut. Die beiden (in Abb. 3 rechts stark ausgezogenen) Randpolygone einer ebenfacettigen Haut legen die Haut eindeutig fest; die Seitenlängen dieser Randpolygone können, wenn die parallel-reziproke ebeneckige Haut gegeben ist, in gewissen Grenzen willkürlich gewählt werden.

Die soeben konstruierten parallel-reziproken ebenfacettigen Häute lassen sich als „Drehrisse" der vorgegebenen ebeneckigen Haut deuten: Jede Seite der ebenfacettigen Haut bestimmt eine gegenseitige infinitesimale Verdrehung zweier Facetten der ebeneckigen Haut (vgl. z. B. in Abb. 3 die Seite $P_1 P_2$ der ebenfacettigen Haut und die Verdrehung $\varepsilon \vec{y}_{12}$ der Viereckfacetten (1), (2) der ebeneckigen Haut). Alle diese Verdrehungen zusammen bewirken eine Verknickung der vorgegebenen ebeneckigen Haut. Jede parallel-reziproke ebenfacettige Haut definiert also als Drehriß eine infinitesimale Verknickung der ebeneckigen Haut und umgekehrt liefert jede infinitesimale Verknickung der ebeneckigen Haut durch ihren Drehriß eine parallel-reziproke ebenfacettige Haut. Das Problem, die infinitesimalen Verknickungen einer ebeneckigen Haut zu ermitteln, ist hiernach äquivalent mit dem soeben gelösten Problem, die parallel-reziproken ebenfacettigen Häute zu konstruieren.

Wegen der Gegenseitigkeit der parallel-reziproken Beziehung kann auch die vorgegebene ebeneckige Haut als Drehriß der zugeordneten ebenfacettigen Häute gedeutet werden. Infolgedessen sind auch die ebenfacettigen Häute (unter Starrhaltung der ebenen Viereckfacetten) infinitesimal verknickbar. Während aber jede beliebig vorgegebene ebeneckige Haut unendlich viele parallel-reziproke ebenfacettige Häute besitzt und demgemäß unendlich viele infinitesimale Verknickungen zuläßt, gibt es, von trivialen Ausnahmefällen abgesehen, zu einer beliebig vorgegebenen ebenfacettigen Haut entweder überhaupt keine oder nur eine einzige parallel-reziproke ebeneckige Haut; eine ebenfacettige Viereckshaut ist also entweder überhaupt nicht infinitesimal verknickbar oder läßt nur eine einzige infinitesimale Verknickung zu.

§ 3. Gegenüberstellung analoger Sätze über Verknickungen und Verbiegungen.

Wir stellen nun die aus den §§ 1,2 sich ergebenden analogen Beziehungen bei den infinitesimalen Verknickungen der ebeneckigen Viereckshäute und den infinitesimalen Verbiegungen der Asymptotenliniennetze einander gegenüber:

Ia) Jeder ebeneckigen Viereckshaut (X) lassen sich unendlich viele parallel-reziproke ebenfacettige Viereckshäute (Y) zuordnen. Dabei können die Seitenlängen der in Abb. 3 rechts stark ausgezogenen Randpolygone von (Y) im wesentlichen willkürlich gewählt werden.

Ib) Jedem Asymptotenliniennetz (x) lassen sich unendlich viele parallel-reziproke konjugierte Kurvennetze (y) zuordnen. Dabei können die Bogenlängen der in Abb. 2 rechts stark ausgezogenen Randkurven von (y) im wesentlichen willkürlich gewählt werden.

IIa) Jede der ebenfacettigen Viereckshäute (Y) legt als Drehriß eine infinitesimale Verknickung der ebeneckigen Viereckshaut (X) fest und jede infinitesimale Verknickung von (X) hat als Drehriß eine der ebenfacettigen Viereckshäute (Y).

IIb) Jedes der konjugierten Kurvennetze (y) legt als Drehriß eine infinitesimale Verbiegung der Fläche (x) fest und jede infinitesimale Verbiegung der Fläche (x) hat als Drehriß eines der konjugierten Kurvennetze (y).

IIIa) Jede der ebenfacettigen Viereckshäute (Y) läßt eine infinitesimale Verknickung zu; diese ist durch die ebeneckige Viereckshaut (X) als Drehriß festgelegt. Umgekehrt ist jede infinitesimal verknickbare ebenfacettige Viereckshaut parallel-reziprok zu einer ebeneckigen Viereckshaut.

IIIb) Jedes der konjugierten Kurvennetze (y) läßt eine infinitesimale Verbiegung zu, bei der es konjugiert bleibt; diese Verbiegung ist durch die Fläche (x) als Drehriß festgelegt. Umgekehrt ist jedes Kurvennetz, das eine infinitesimale Verbiegung zuläßt, bei der es konjugiert bleibt, parallel-reziprok zu einem Asymptotenliniennetz.

Einen bemerkenswerten Spezialfall bilden die ebeneckigen Viereckshäute, bei denen die Viereckfacetten windschiefe Parallelogramme sind. Die parallel-reziproken ebenfacettigen Viereckshäute haben dann an jeder inneren Ecke paarweise gleiche Scheitelwinkel. Für diesen von mehreren Autoren untersuchten Spezialfall (vgl. [4], [5], [6]) läßt sich die analoge Gegenüberstellung folgendermaßen ergänzen:

IVa) Wenn die ebeneckige Viereckshaut (X) lauter (i. a. windschiefe) Parallelogramme als Facetten hat, dann sind die parallel-reziproken ebenfacettigen Viereckshäute (Y) scheitelwinkelgleich.

IVb) Wenn das Asymptotenliniennetz (x) ein *Tschebytscheff*-Netz (Parallelogramm-Netz) ist, was bekanntlich bei den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes und nur bei diesen zutrifft, dann sind die Kurven der parallel-reziproken Netze (y) geodätische Linien, die Flächen (y) also *Voß*'sche Flächen; vgl. [7].

Die allgemeinen Sätze (I) bis (III) lassen sich noch dadurch erweitern, daß man sowohl das Paar der Viereckshäute (X), (Y) als auch das Flächenpaar (x), (y) zu einem *Darboux*'schen Zwölferkranz von Viereckshäuten bzw. Flächen ergänzt; vgl. hierzu [8], [9].

Literatur.

[1] *S. Finsterwalder:* Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jber. DMV 6 (1897).

[2] *R. Sauer* und *H. Graf:* Über Flächenverbiegung in Analogie zur Verknickung offener Facettenflache. Math. Ann. 105 (1931), 499—535.

[3a] *R. Sauer:* Projektive Liniengeometrie (V. Abschnitt, S. 145—163). Göschens Lehrbücherei, Bd. 23, Berlin und Leipzig 1937.

[3b] *R. Sauer:* Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. Math. Ann. 108 (1933), 673—693.

[4] *G. T. Bennett:* A new mechanism. Engineering 76 (1903), 777—778. — The skew isogram mechanism. Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151—173.

[5] *R. Sauer:* Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen. Math. Zeitschrift 52 (1950), 611—622.

[6] *W. Wunderlich:* Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung. Sitzungsbr. Österr. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Klasse, Abteilung IIa, 160 (1951), 39—77.

[7] *A. Voß:* Über diejenigen Flächen, auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abteilung (1888).

[8] *E. Meiners:* Der Darboux'sche Flächenkranz usw., Diss. T. H. Aachen (1941).

[9] *R. Sauer:* Projektive Transformationen des Darboux'schen Flächenkranzes. Archiv der Mathematik 1 (1948), 89—93.

Zum Transversalenproblem.

Teil I: Geraden im R_3, R_4 und R_5.

Von

Roland Weitzenböck, Zelhem (Niederlande).

(Eingelangt am 31. März 1953.)

§ 1. Allgemeines.

Im projektiven n-dimensionalen Raum R_n ist ein Punkt x durch $n+1$ komplexe Verhältniszahlen $x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}$ gegeben. $d+1$ linear-unabhängige Punkte $x, y, \ldots, t$, d. h. $d+1$ Reihen $x_i, y_j \ldots, t_k$ wofür die Matrix

$$\left.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n+1} \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \cdot & \cdot & \cdot & t_{n+1} \end{vmatrix}\right\} (d+1) \text{ Zeilen, } (1 < d < n)$$

den Rang $d+1$ hat, bestimmen einen linearen, d-dimensionalen Raum R_d. Die $\binom{n+1}{d+1}$ $(d+1)$-reihigen Determinanten

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}} = (xy \ldots t)_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}}$$

dieser Matrix sind die homogenen Punktkoordinaten dieses R_d. Es gibt $\infty^{(d+1)(n-d)}$ R_d im R_n. Dual zu einem R_d ist ein linearer R_{n-d-1}. Sind $\xi, \eta, \ldots, \tau$ $(n-d)$ unabhängige Punkte des R_{n-d-1}, also

$$\pi_{k_1 k_2 \ldots k_{n-d}} = (\xi\, \eta \ldots \tau)_{k_1 k_2 \ldots k_{n-d}}$$

seine homogenen Punktkoordinaten, dann ist

$$\Sigma p_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}} \pi_{k_1 k_2 \ldots k_{n-d}} = (xy \ldots t\, \xi\, \eta \ldots \tau) = \Sigma \pm x_1 y_2 \ldots \tau_{n+1} = 0$$

die Bedingung dafür, daß der R_d (p) den R_{n-d-1} (π) schneidet, daß also diese zwei Räume wenigstens einen Punkt gemein haben.

Zu $(d+1)(n-d)$ gegebenen linearen Räumen R_{n-d-1} in allgemeiner Lage gibt es dann eine endliche Anzahl τ_d von linearen „Transversal-Räumen" R_d, die diese $(d+1)(n-d)$ Räume R_{n-d-1} schneiden. Die

rechnerische Ermittlung dieser Transversalräume bildet das „*Transversalenproblem*". So haben z. B. im R_3 vier Geraden zwei Transversalen, d. h. es gibt zwei Geraden, die vier gegebene Geraden im R_3 schneiden. Im vierdimensionalen Raum R_4 gibt es zu sechs Geraden fünf Transversalebenen; im R_5 zu 8 Geraden 14 Transversal-R_3 und zu 9 Ebenen 42 Transversal-Ebenen.

Allgemein ist die Zahl τ_d gleich dem Grade der *Graßmann*'schen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{\tau_d}_{(d+1)(n-d)}$, deren Punkte in einem linearen Raume $\mathfrak{R}_{\binom{n+1}{d+1}-1}$ von $\binom{n+1}{d+1}-1$ Dimensionen die Bildpunkte eines R_d sind. Es ist[1]

$$\tau_d = \frac{1!\,2!\,3!\,\ldots\,d!\,((d+1)(n-d))!}{n!\,(n-1)!\,\ldots\,(n-d)!} \tag{1}$$

Für $d = 1$, also für $2(n-1)$ Geraden im R_n wird dies zu

$$\tau_1 = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} \quad (n \geqq 3) \tag{2}$$

und es gibt dann zu $2(n-1)$ Geraden R_1 im R_n τ_1 Transversalräume R_{n-2}.

§ 2. Vier Geraden im R_3.

Es seien 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2 vier Geraden allgemeiner Lage im R_3. A se ein Punkt auf 1^2, B ein Punkt auf 2^2. Daß die Gerade AB die beiden Geraden 3^2 und 4^2 schneidet, wird ausgedrückt durch

$$(AB3^2) = 0 \text{ und } (AB4^2) = 0. \tag{3}$$

Hierbei sind $(AB)_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$ die sechs Plückerschen Linienkoordinaten von AB,

$$3_{ik} = 3_i\, 3_k = -3_k\, 3_i \text{ (Komplexsymbole!)}$$

die der Geraden 3^2 und $(AB3^2)$ ist die vierreihige Determinante

$$(AB33) = 2\,\Sigma\,(AB)_{ik}\,3_{rs} = 2\,[(AB)_{12}\,3_{34} + (AB)_{13}\,3_{42} + (AB)_{14}\,3_{23} + \\ + (AB)_{34}\,3_{12} + (AB)_{42}\,3_{13} + (AB)_{23}\,3_{14}].$$

Setzen wir

$$B = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2,$$

dann geben (3) zwei lineare Gleichungen für $\beta_1 : \beta_2$, woraus die β_i eliminiert werden können. Man erhält

---

[1] *H. Schubert*, Acta mathem. 8 (1886); B. L. *van der Waerden*, Mathem. Ann. **113** (1936), 199—203.

$$(AB_1\,3^2)\,(AB_2\,4^2) - (AB_1\,4^2)\,(AB_2\,3^2) = 0$$

und hier lassen sich die B_i zu den Koordinaten $2_{ik} = (B_1\,B_2)_{ik}$ zusammenfassen:

$$R_{234}\,(A) = (A23^2)\,(A24^2) = 0. \tag{4}$$

Man rechnet leicht nach, daß $R_{234} = -R_{324} = \ldots$ ist, daß also R_{234} in den Indizes alterniert.

Setzen wir nun

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,$$

so gibt (4) eine quadratische Form für die α_i, wodurch die beiden Transversalen bestimmt sind. Man kann dies auch so ausdrücken: Für veränderliche A stellt (4) die Regelfläche zweiter Ordnung in Punktkoordinaten dar, die durch die drei Erzeugenden 2^2, 3^2 und 4^2 gegeben wird. Berechnet man die Discriminante D der aus (4) sich ergebenden quadratischen Form

$$R_{234}\,(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2),$$

so lassen sich wieder A_1 und A_2 zu $(A_1\,A_2)_{ik} = 1_{ik}$ zusammenfassen und es wird

$$D = \begin{vmatrix} 0 & (1^2\,2^2) & (1^2\,3^2) & (1^2\,4^2) \\ (2^2\,1^2) & 0 & (2^2\,3^2) & (2^2\,4^2) \\ (3^2\,1^2) & (3^2\,2^2) & 0 & (3^2\,4^2) \\ (4^2\,1^2) & (4^2\,2^2) & (4^2\,3^2) & 0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Hier ist z. B.

$$(1^2\,2^2) = 4\,\Sigma\,1_{ik}\,2_{rs} =$$
$$= 4\,(1_{12}\,2_{34} + 1_{13}\,2_{42} + 1_{14}\,2_{23} + 1_{34}\,2_{12} + 1_{42}\,2_{13} + 1_{23}\,2_{14}) \tag{6}$$

die bilineare Invariante der beiden Geraden 1^2 und 2^2. $D = 0$ ist dann die Bedingung dafür, daß die beiden Transversalen der vier Geraden 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2 zusammenfallen, d. h. für die „hyperboloidische Lage" dieser vier Geraden. Ersetzt man in (5) 4^2 durch π^2, wo die π_{ik} die Koordinaten einer variablen Geraden sind, so ergibt sich die Gleichung der durch 1^2, 2^2, 3^2 bestimmten Regelfläche in Linienkoordinaten.

Die Gleichung (4) bestimmt auf der Geraden 1^2 zwei Punkte $A^{(4)}$, in denen die beiden Transversalen T_{1234} die Gerade 1^2 treffen. Ersetzen wir 4^2 durch eine fünfte Gerade 5^2, dann erhalten wir analog die Schnittpunkte $A^{(5)}$ von T_{1235} mit 1^2. Wenn ein Punkt $A^{(4)}$ mit einem Punkte $A^{(5)}$ zusammenfallen soll, so muß die Resultante R_{45} der beiden binären quadratischen Formen in α_i

$$R_{234}\,(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \text{ und } R_{235}\,(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \tag{7}$$

Null sein. Für die Existenz einer Transversalen T_{12345}, d. h. einer Geraden, die alle Geraden 1^2 bis 5^2 schneidet, ist $R_{45} = 0$ notwendig. Hinreichend erst dann, wenn die Gerade T_{12345} bereits durch einen Punkt A auf 1^2 und durch die beiden Geraden 2^2 und 3^2 eindeutig bestimmt ist.

Wir haben nun nach (4):

$$\left|\begin{array}{l} R_{234} = a_1^2\,(A_1\,23^2)\,(A_1\,24^2) + a_1 a_2\,[(A_1\,23^2)\,(A_2\,24^2) + (A_2\,23^2)\,(A_1\,24^2)] + \\ \qquad + a_2^2\,(A_2\,23^2)\,(A_2\,24^2) = a_0\,a_1^2 + 2\,a_1\,a_1\,a_2 + a_2\,a_2^2 \\ R_{235} = a_1^2\,(A_1\,23^2)\,(A_1\,25^2) + \ldots = b_0\,a_1^2 + 2\,b_1\,a_1\,a_2 + b_2\,a_2^2 \end{array}\right. \qquad (8)$$

In der Resultante

$$R_{45} = (a_0\,a_2 - a_1^2)\,(b_0\,b_2 - b_1^2) - \tfrac{1}{4}\,(a_0\,b_2 + a_2\,b_0 - 2\,a_1\,b_1)^2$$

lassen sich dann wieder A_1 und A_2 zu $(A_1\,A_2)_{ik} = 1_{ik}$ zusammenfassen. Man erhält nach einiger Rechnung

$$R = \frac{1}{8\,.\,16}\,.\,(2^2\,3^2)\,(3^2\,1^2)\,(1^2\,2^2)\,\Delta_{12345}. \qquad (9)$$

Hierbei bedeutet Δ_{12345} die fünfreihige symmetrische Determinante[2]

$$\Delta_{12345} = \begin{vmatrix} 0 & (1^2\,2^2) & (1^2\,3^2) & (1^2\,4^2) & (1^2\,5^2) \\ (2^2\,1^2) & 0 & (2^2\,3^2) & (2^2\,4^2) & (2^2\,5^2) \\ (3^2\,1^2) & . & . & . & . \\ (4^2\,1^2) & . & . & . & . \\ (5^2\,1^2) & . & . & . & 0 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Bei der Berechnung von (9) ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß fünf Gerade im R_3 keine anderen projektiven Invarianten haben als die bilinearen Verbindungen (6); eine Tatsache, die wesentlich auf der Identität

$$(132^2)\,(134^2) = \tfrac{1}{4}\,[(1^2\,2^2)\,(3^2\,4^2) - (1^2\,3^2)\,(2^2\,4^2) + (1^2\,4^2)\,(2^2\,3^2)] \qquad (11)$$

beruht[3]. Lassen wir in (10) die fünfte Gerade veränderlich: $5_{ik} = \pi_{ik}$, dann stellt $\Delta_{1234\pi} = 0$ das Produkt der beiden Transversalen T_{1234} in Linienkoordinaten dar.

§ 3. Fünf Geraden im R_4.

Es seien jetzt $1^2, 2^2, \ldots, 5^2$ fünf Geraden allgemeiner Lage im vierdimensionalen projektiven Raum R_4. Wir fragen nach den Transversalebenen T_{12345}, d. h. nach den Ebenen, die diese fünf Geraden schneiden.

[2] Sie findet sich schon bei *Cayley*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **11** (1868).
[3] Vgl. z. B. mein Buch „Invariantentheorie", p. 180; Groningen (1923).

A sei wieder ein Punkt auf 1^2, B auf 2^2 etc. Eine Ebene ABC schneidet 4^2 und 5^2 für

$$(ABC4^2) = 0 \text{ und } (ABC5^2) = 0. \tag{12}$$

Setzt man $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2$, dann entstehen zwei Linearformen in den γ_i. Die Elimination von γ_i gibt, wenn wieder $(C_1, C_2)_{ik} = 3_{ik}$ gesetzt wird

$$R_{345}(AB) = (AB34^2)(AB35^2) = 0. \tag{13}$$

Die Gleichung

$$R_{34\pi}(AB) = (AB34^2)(AB3\pi^2) = 0 \tag{14}$$

ist also für variable π_{ik} die Gleichung der durch die beiden Punkte A und B gehenden Transversalebene T_{1234}. Man beweist leicht, daß die Ausdrücke R_{345} von (13) in den Indices alternieren:

$$R_{345} = -R_{435} = R_{453} = \ldots \tag{15}$$

und daß sie die sogenannten p-Relationen erfüllen, d. h. denselben quadratischen Gleichungen genügen wie Ebenenkoordinaten. Es ist nämlich

$$R_{ijk} R_{lmn} - R_{ljk} R_{imn} + R_{lik} R_{jmn} - R_{lij} R_{kmn} = 0. \tag{16}$$

Hier müssen von den sechs Indices *ijklmn* wenigstens fünf verschiedene vorhanden sein, damit die linke Seite nicht Null ist, unabhängig von der Bedeutung der R_{ijk}.

In R_{345} sind die beiden Punkte A und B nur in den Verbindungen $(AB)_{ik} = \pi_{ik}$ enthalten. Beschauen wir die Linienkoordinaten π_{ik} als Veränderliche, dann gibt

$$R_{345}(\pi_{ik}) = (\pi^2 34^2)(\varrho^2 35^2) = 0 \qquad (\pi_{ik} = \varrho_{ik}) \tag{17}$$

einen quadratischen Linienkomplex als Ort derjenigen Geraden, durch die man Ebenen legen kann, die drei gegebene Geraden 3^2, 4^2 und 5^2 treffen.

Wann wird die Transversalebene T_{1234} durch AB mit der Gleichung (14) unbestimmt? Schreiben wir (14) in der Gestalt

$$R_{\pi 34}(AB) = (AB3^2\pi)(AB4^2\pi),$$

dann sehen wir, daß für das indentische Verschwinden (für alle π_{ik}) von $R_{\pi 34}$ notwendig und hinreichend ist, daß entweder einer der beiden Räume $(AB3^2)$ und $(AB4^2)$ unbestimmt wird oder daß diese beiden R_3 zusammenfallen. In diesem letzteren Falle muß die Gerade AB im $R_3(3^2 4^2)$ liegen, d. h. $A = A_{34}$ ist der Schnittpunkt von 1^2 mit dem $R_3(3^2 4^4)$ und $B = B_{34}$ der Schnittpunkt von 2^2 mit demselben Raum

$(3^2\,4^2)$. Jede Ebene durch die Gerade $A_{34}\,B_{34}$, die 3^2 schneidet, trifft auch die Gerade 4^4 und dies gibt ∞^1 Transversalebenen T_{1234}.

Wenn einer der beiden Räume, z. B. $(AB3^2)$ unbestimmt wird, so muß — wir nehmen die vier Geraden 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2 stets in allgemeiner Lage an — der Punkt A in der Ebene $(B3^2)$, also auch im Raume $R_3\,(2^2\,3^3)$ liegen, d. h. $A = A_{23}$ sein. Jede Ebene $(A_{23}BC)$ liegt dann in diesem Raum und D ist also der Punkt D_{23}. Es gibt dann ∞^1 Transversalebenen T_{1234} durch die Gerade $A_{23}\,D_{23}$. Bestimmen aber A_{23}, B und C keine Ebene, so ist $B = B_{13}$ und $C = C_{12}$; diese drei Punkte liegen dann auf der einzigen Geraden durch A_{23} die 2^2 und 3^2 schneidet. Es gibt also ein zweites Büschel von ∞^1 Transversalebenen T_{1234} durch diese Gerade $A_{23}B_{13}$. Analoges gilt, wenn $(AB4^2)$ unbestimmt wird.

Zusammenfassend haben wir: Die Transversalebene T_{1234} durch AB wird dann und nur dann unbestimmt, wenn

$$\text{Erstens } A = A_{34},\ B = B_{34} \text{ oder zweitens } A = A_{23},\ B = B_{13}$$
$$\text{oder drittens } A = A_{24},\ B = B_{14}. \tag{18}$$

Jetzt sei 5^2 eine fünfte Gerade. Wir halten den Punkt A fest und setzen wieder $B = \beta_1\,B_1 + \beta_2\,B_2$. Dann gibt (13) für die β_i die quadratische Form

$$\left\{\begin{array}{l} R_{345}\,(\beta_1\,B_1 + \beta_2\,B_2) = \beta_1{}^2\,a_0 + 2\,\beta_1\,\beta_2\,a_1 + \beta_2{}^2\,a_2 = \\ = \beta_1{}^2\,(AB_1\,34^2)\,(AB_1\,35^2) + \beta_1\,\beta_2\,[(AB_1\,34^2)\,(AB_2\,35^2) + \\ \quad + (AB_2\,34^2)\,(AB_1\,35^2)] + \beta_2{}^2\,(AB_2\,34^2)\,(AB_2\,35^2). \end{array}\right. \tag{19}$$

Man erhält also durch jeden Punkt A der Geraden 1^2 *zwei* Transversalebenen T_{1234}.

In den Ausnahmepunkten haben wir:
Bei $A = A_{34} = 1\,(1^3\,4^2)$ wird

$$R_{345}(A_{34}B) = (1B34^2)\,(13^2\,4^2)(A_{23}B35^2) = \tfrac{1}{2}\,(1^2\,34^2)\,.\,(B3^2\,4^2)(A_{23}B35^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(B3^2\,4^2)\,.\,(BA_{23}\,C_{14}\,5^2),$$

so daß also die beiden durch A_{34} gehenden Transversalebenen T_{12345} die Gerade 2^2 in den Punkten B_{34} und $(BA_{23}\,C_{14}\,5^2) = 0$ schneiden.

Bei $A = A_{23} = 1\,(12^2\,3^2)$ (und analog bei $A = A_{24}$) wird, wenn wir die Reihe 1 des zweiten Klammerfaktors in den ersten bringen:

$$R_{345}(A_{23}B) = (1B34^2)\,(12^2\,3^2)\,(A_{23}B35^2) = -(1^2\,B34)\,(42^2\,3^2)\,(1B35^2)\,(12^2\,3^2);$$

hier bringen wir wieder die Reihe 1 des vierten Klammernfaktors in den dritten:

$$R_{345}\,(A_{23}B) = (1^2\,B34)\,(1^2\,B35)\,(42^2\,3^2)\,(52^2\,3^2).$$

Vereinigt man schließlich die beiden Reihen 3 im ersten Klammerfaktor, so kommt

$$R_{345}\,(A_{23}B) = \tfrac{1}{2}\,(3^2\,1^2\,B)\,.\,(1^2\,B45)\,(42^2\,3^2)\,(52^2\,3^2) = \\ = \tfrac{1}{2}\,(B1^2\,3^2)\,.\,(B1^2\,D_{23}\,E_{23}).$$

Die beiden Transversalebenen T_{12315} durch A_{23} schneiden somit 2^2 im Punkte B_{13} und im Punkte $(B1^2\,D_{23}\,E_{23}) = 0$.

Man zeigt leicht, daß es bei allgemeiner Lage der fünf Geraden auf 1^2 keinen Punkt A gibt, durch den unendlich-viele Transversalebenen T_{12345} gehen und daß es vier Punkte A gibt, für welche die beiden T_{12345} zusammenfallen. In diesem Falle muß die Discriminante D_{11} der quadratischen Form (19), also $a_0\,a_2 - a_1^2$ verschwinden. Setzt man die Werte für die a_i ein, so lassen sich wieder die Koordinaten von B_1 und B_2 zu $(B_1\,B_2)_{ik} = 2_{ik}$ zusammenfassen und man erhält

$$-16D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & (A2^2\,3^2) & (A2^2\,4^2) & (A2^2\,5^2) \\ (A3^2\,2^2) & 0 & (A3^2\,4^2) & (A3^2\,5^2) \\ (A4^2\,2^2) & (A4^2\,3^2) & 0 & (A4^2\,5^2) \\ (A5^2\,2^2) & (A5^2\,3^2) & (A5^2\,4^2) & 0 \end{vmatrix} = \Delta_{2345}\,(A). \quad (20)$$

Hier bedeutet $(A2^2\,3^2)$ die fünfreihige Determinante

$$(A2^2\,3^2) = 4\,.\,\Sigma \pm A_1\,2_{23}\,3_{45};$$

sie ist Null wenn der Punkt A im Raume $R_3\,(2^2\,3^2)$, also im Verbindungsraum der Geraden 2^2 und 3^2 gelegen ist, d. h. also bei $A = A_{23}$.

Für veränderliche A stellt (20) einen R_3 vierter Ordnung dar. Er ist der geometrische Ort derjenigen Punkte A, bei denen die beiden durch A möglichen Transversalebenen T_{12345} zusammenfallen oder unbestimmt werden. Die Geraden 2^2, 3^2, 4^2 und 5^2 selbst sind Doppellinien auf dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit.

§ 4. Sechs Geraden im R^4.

Ersetzen wir in (19) die fünfte Gerade 5^2 durch 6^2, so ergibt sich neben der quadratischen Form $R_{345}\,(A, \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2)$ eine zweite

$$\left\{\begin{array}{l} R_{346} = \beta_1^2\,b_0 + 2\,\beta_1\,\beta_2\,b_1 + \beta_2^2\,b_2 = \\ \quad = \beta_1^2\,(AB_1\,34^2)\,(AB_1\,36^2) + \beta_1\,\beta_2\,[(AB_1\,34^2)\,(AB_2\,36^2) + \\ \qquad + (AB_2\,34^2)\,(AB_1\,36^2)] + \beta_2^2\,(AB_2\,34^2)\,(AB_2\,36^2). \end{array}\right. \quad (19a)$$

Die Nullpunkte dieser Form geben dann die zwei durch A gehenden Transversalebenen T_{12346}. Für die Existenz einer Transversalebene T_{123456} ist notwendig, daß die beiden quadratischen Gleichungen (für β_1/β_2)

$$R_{345} = 0 \text{ und } R_{346} = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. daß die Resultante R dieser beiden Formen Null ist. Man erhält analog zu (9):

$$16^2 \,.\, R = 2 \,.\, (A3^2\, 4^2)\,(A4^2\, 2^2)\,(A2^2\, 3^2) \,.\, \Delta_{23456}\,(A). \tag{21}$$

Die fünfreihige Determinante $\Delta_{23456}\,(A)$ ist analog zu (10) gebildet; ihre Elemente sind jetzt Klammerfaktoren der Gestalt $(A2^2\, 3^2)$, die aus den dreidimensionalen Klammerfaktoren $(2^2\, 3^2)$ durch Hinzunahme der Reihe A entstehen. Für R ergibt sich mit Benützung von (20) auch der Ausdruck

$$16^2 \,.\, R = \Delta_{2345}\,(A) \,.\, \Delta_{2346}\,(A) - \Delta^2_{2345/6}\,(A), \tag{22}$$

wobei

$$\Delta_{2345/6}\,(A) = \begin{vmatrix} 0 & (A2^2\ 3^2) & (A2^2\ 4^2) & (A2^2\ 5^2) \\ (A3^2\ 2^2) & 0 & (A3^2\ 4^2) & (A3^2\ 5^2) \\ (A4^2\ 2^2) & (A4^2\ 3^2) & 0 & (A4^2\ 5^2) \\ (A6^2\ 2^2) & (A6^2\ 3^2) & (A6^2\ 4^2) & (A6^2\ 5^2) \end{vmatrix} \tag{23}$$

gesetzt ist.

Die Bedingung $R = 0$ ist notwendig für eine T_{123456}, aber nicht hinreichend. Aus (21) entnimmt man, daß der Punkt A auf dem durch $\Delta_{23456}\,(A) = 0$ gegebenen Raum fünfter Ordnung liegen muß, damit durch A eine T_{123456} möglich sei. Wir erhalten also 5 Punkte A_0 auf 1^2 mit $\Delta_{23456}\,(A_0) = 0$, d. h. es gibt fünf Transversalebenen T_{123456} zu sechs Geraden allgemeiner Lage im R_4.

Aus (21) und (22) findet man wegen

$$\Delta_{234} = \begin{vmatrix} 0 & (A2^2\ 3^2) & (A2^2\ 4^2) \\ (A3^2\ 2^2) & 0 & (A3^2\ 4^2) \\ (A4^2\ 2^2) & (A4^2\ 3^2) & 0 \end{vmatrix} = 2\,(A3^2\ 4^2)\,(A4^2\ 2^2)\,(A2^2\ 3^2)$$

die Beziehung

$$(\Omega_5) \ldots \Delta_{234} \,.\, \Delta_{23456} = \Delta_{2345} \,.\, \Delta_{2346} - \Delta^2_{2345/6}. \tag{24}$$

Ebenso gilt

$$(\Omega_4) \ldots \Delta_{23} \,.\, \Delta_{2345} = \Delta_{234} \,.\, \Delta_{235} - \Delta^2_{234/5} \text{ mit } \Delta_{23} = -\,(A2^2\ 3^2)^2. \tag{25}$$

Diese Gleichungen (25) und (24) sind Spezialfälle einer Identität (Ω_n), die ganz allgemein für symmetrische Determinanten $|\,a_{ik}\,|$ mit $a_{ii} = 0$ gültig ist:

$$(\Omega_n) \ldots \Delta_{12\ldots n-2} \,.\, \Delta_{12\ldots n} = \Delta_{12\ldots n-2,\,n-1} \,.\, \Delta_{12\ldots n-2,\,n} - \Delta^2_{12\ldots n-2,\,n-1/n} \tag{26}$$

wobei die Bedeutung von $\Delta_{12\ldots n-2,\,n-1/n}$ aus (23) zu entnehmen ist.

Wie schon oben erwähnt, entstehen die Invarianten $(Ar^2\, s^2)$, die als Elemente in (23) auftreten, aus den dreidimensionalen Invarianten

$$(r^2\,s^2) = 4\,(r_{12}\,s_{34} + r_{13}\,s_{42} + r_{14}\,s_{23} + r_{34}\,s_{12} + r_{42}\,s_{13} + r_{23}\,s_{14})$$

durch Beifügung einer Reihe A. Diesem Übergang von $(r^2\,s^2)$ zu $(Ar^2\,s^2)$ liegt ein „Übertragungsprinzip" zugrunde, das sich ergibt, wenn man bedenkt, daß im R_4 lineare Räume in einem festen $R_3\,(A')$ dual sind zu Räumen durch einen festen Punkt A. Diese Dualität gibt eine Zuordnung zwischen projektiven Invarianten von Figuren im $R_3\,(A')$ und den vierdimensionalen Invarianten der dualen Figuren im Bündel mit dem Zentrum A. Rechnerisch sieht dies folgendermaßen aus. Sei der $R_3\,(A')$ durch die vier Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 gegeben und A nicht in A' enthalten, so daß also

$$(AA') = (AA_1\,A_2\,A_3\,A_4) \neq 0$$

ist. Jeder Punkt y des R_4 ist dann in der Gestalt

$$y = YA + Y_1\,A_1 + Y_2\,A_2 + Y_3\,A_3 + Y_4\,A_4 \tag{27}$$

darstellbar und die Y_i können wir als die dreidimensionalen Koordinaten der Projektion Y des Punktes y von A aus auffassen. Für die fünfreihige Determinante $(Ayzrs)$ folgt dann aus (27)

$$(Ayzrs) = (AA_1\,A_2\,A_3\,A_4)\,.\,(YZRS) = (AA')\,.\,(YZRS). \tag{28}$$

Hieraus ergibt sich, was die Invarianten von Geraden im R_3 betrifft: jeder Klammerfaktor $(pqrs)$ kann durch $(Apqrs)$ ersetzt werden. So wird z. B. aus der Identität (11) für vier Geraden 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2:

$$(A132^2)\,(A134^2) = \tfrac{1}{4}\,[(A1^22^2)\,(A3^24^2) - (A1^23^2)\,(A2^24^2) + (A1^24^2)\,(A2^23^2)]$$

und bei sechs Geraden entspricht der dreidimensionalen irreduziblen Invariante $(1^245)\,(2^256)\,(3^264)$ im A-Bündel des R_4 die Invariante

$$(A1^2\,45)\,(A2^2\,56)\,(A3^2\,64). \tag{29}$$

Nach (21) ist, wenn wir π^2 statt 6^2 schreiben und die π_{ik} als laufende Koordinaten beschauen

$$\Delta_{2345\pi}\,(A) = 0 \tag{30}$$

die Gleichung der beiden durch A gehenden Transversalebenen T_{12345}.

§ 5. Die fünf T_{123456}.

Die Gleichung

$$\Delta_{23456}\,(A) = \begin{vmatrix} 0 & (A2^23^2) & (A2^24^2) & (A2^25^2) & (A2^26^2) \\ (A3^22^2) & 0 & (A3^24^2) & (A3^25^2) & (A3^26^2) \\ . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & 0 & (A5^26^2) \\ (A6^22^2) & . & . & (A6^25^2) & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

bestimmt auf der Geraden 1^2 fünf Punkte A_0, durch die eine Transversalebene T_{123456}, also eine Ebene geht, die alle sechs Geraden 1^2 bis 6^2 trifft.

Nach (26) haben wir für $n = 6$:

$$(\Omega_6) \ldots \Delta_{2345}(A) . \Delta_{23456\pi}(A) = \Delta_{23456}(A) . \Delta_{2345\pi}(A) - \Delta^2_{23456/\pi}(A). \quad (32)$$

Es gibt im R_4 durch einen Punkt A ∞^4 Ebenen, da es dual in einem linearen R_3 ∞^4 Geraden gibt. Dual zu einem linearen Geradenkomplex im R_3 ist dann ein System von ∞^3 Ebenen im R_4 durch den Punkt A. Wir wollen ein solches System einen linearen A-Komplex nennen. Die Bedingung, daß sechs Ebenen

$$(A2^2), (A3^2), (A4^2), (A5^2), (A6^2) \text{ und } (A\pi^2)$$

einem A-Komplex angehören, ist dann $\Delta_{23456\pi}(A) = 0$. Dieser A-Komplex ist speziell, d. h. die fünf Ebenen $(A2^2)$ bis $(A6^2)$ besitzen eine gemeinsame Transversalebene τ (die durch A geht und jede dieser Ebenen längs einer Geraden schneidet), wenn $\Delta_{23456}(A) = 0$ ist. Das Quadrat dieser Ebene τ ist dann durch $\Delta_{23456\pi}(A) = 0$ dargestellt.

Nun setzen wir $A = A_0$. (32) gibt dann

$$\Delta_{2345}(A_0) . \Delta_{23456\pi}(A_0) = - \Delta^2_{23456/\pi}(A_0). \quad (33)$$

Nach dem soeben bemerkten ist also die Ebene τ, d. h. die zum Punkte A_0 gehörige Transversalebene T_{123456} gegeben durch

$$\Delta_{23456/\pi}(A_0) = \begin{vmatrix} 0 & (A_0 2^2 3^2) & (A_0 2^2 4^2) & (A_0 2^2 5^2) & (A_0 2^2 6^2) \\ (A_0 3^2 2^2) & 0 & (A_0 3^2 4^2) & (A_0 3^2 5^2) & (A_0 3^2 6^2) \\ (A_0 4^2 2^2) & (A_0 4^2 3^2) & 0 & (A_0 4^2 5^2) & (A_0 4^2 6^2) \\ (A_0 5^2 2^2) & (A_0 5^2 3^2) & (A_0 5^2 4^2) & 0 & (A_0 5^2 6^2) \\ (A_0 \pi^2 2^2) & (A_0 \pi^2 3^2) & (A_0 \pi^2 4^2) & (A_0 \pi^2 5^2) & (A_0 \pi^2 6^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Diese Gleichung stellt einen linearen Geradenkomplex dar, der alle sechs Geraden 1^2 bis 6^2 enthält. Man rechnet leicht nach, daß dieser Komplex dann und nur dann speziell ist, wenn $\Delta_{23456}(A_0) = 0$ wird. Und dies ist hier der Fall.

Die Ermittlung von A_0 hängt von einer Gleichung fünften Grades

$$\Delta_{23456}(A_1 + \alpha A_2) = 0 \quad (35)$$

ab[4]. Hat man diese gelöst, ist also ein Punkt A_0 auf der Geraden 1^2 bekannt, so ist die Bestimmung der zugehörigen Punkte B_0 auf 2^2 und C_0

[4] Über das duale Problem („6-Ebenenproblem im R_4") habe ich 1912 auf dem Internationalen Mathem. Kongres in Cambridge (1912) vorgetragen; eine ausführliche Behandlung ist zu finden in den Wiener Sitzungsberichten **121** (1912), p. 2554—2633.

auf der Geraden 3^2 eine lineare Aufgabe. Geometrisch ist dies ohne weiteres klar, denn B_0 und C_0 sind die Schnittpunkte der Geraden 2^2 und 3^2 mit der durch die Gleichung (34) gegebenen Ebene. Algebraisch ist B_0 die existierende gemeinsame Wurzel B der beiden in B quadratischen Gleichungen (vgl. (13))

$$(A_0\, B34^2)\,(A_0\, B35^2) = 0 \text{ und } (A_0\, B34^2)\,(A_0\, B36^2) = 0;$$

und weiß man von zwei quadratischen Gleichungen, daß sie eine gemeinsame Wurzel haben, dann ist die Ermittlung dieser eine lineare Aufgabe. Der Punkt C_0 schließlich kann z. B. aus $(A_0\, B_0\, C4^2) = 0$ bestimmt werden.

Eliminiert man α aus (35) und aus

$$\Delta_{23456/\pi}\,(A_1 + \alpha\, A_2) = 0, \tag{36}$$

berechnet mit anderen Worten die Resultante R dieser beiden Gleichungen, so lassen sich wieder die beiden Punkte A_1 und A_2 zu $(A_1\, A_2)_{ik} = 1_{ik}$ zusammenfassen, so daß also in R nur die Koordinaten der sieben Geraden $1^2, 2^2, \ldots, 6^2$ und π^2 auftreten. Man sieht leicht, daß sich die Graden von R in den einzelnen Geraden durch das Schema

$$R\,(g_1^{25};\, g_2^{20},\, g_3^{20},\, g_4^{20},\, g_5^{20};\, g_6^{15};\, g_\pi^{5}) \tag{37}$$

festhalten lassen; d. h. R ist vom Grade 25 in den Koordinaten 1_{ik} der ersten Geraden, vom Grade 20 in den Koordinaten 2_{ik} der zweiten Geraden, ... vom Grade 5 in den Koordinaten π_{ik}. $R=0$ stellt also bei veränderlichem π_{ik} einen Linienkomplex fünften Grades dar: *das Produkt der fünf Transversalebenen* T_{123456}. Setzen wir $\pi_{ik} = 7_{ik}$, dann kann $R = 0$ als Bedingung $S = 0$ dafür gelesen werden, *daß sieben Geraden* 1^2 *bis* 7^2 *eine Transversalebene* $T_{1234567}$ *zulassen*. Da nun aber aus Symmetriegründen die Invariante S nicht nur in den 7_{jk}, sondern in allen sieben Geraden vom selben Grade fünf sein muß, folgt, daß S in R als Faktor enthalten sein muß:

$$R = S\,(g_1^{5},\, g_2^{5},\, \ldots,\, g_7^{5})\,.\,\Phi\,(g_1^{20};\, g_2^{15},\, g_3^{15},\, g_4^{14},\, g_5^{15};\, g_6^{10}). \tag{38}$$

Eine analoge Erscheinung fanden wir auch bei (9), wo Φ durch das Produkt $(2^23^2)\,(3^21^2)\,(1^22^2)$ dargestellt wurde.

Aus der Tatsache, daß S eine ganze rationale projektive Invariante von 7 Geraden im R_4 ist, die die Koordinaten jeder Geraden im Grade fünf enthält, finden wir, wenn S symbolisch geschrieben wird, daß S eine Summe von Gliedern ist, deren jedes aus

$$\frac{7\,.\,2\,.\,5}{5} = 14 \text{ Klammerfaktoren } (12345)$$

besteht. Mit anderen Worten, S ist vom Gewichte 14. In (12345) deuten die Ziffern gleiche oder verschiedene Reihen von Komplexsymbolen an. Für das Transversalenproblem bei 8 Geraden im R_5 erhält man so, indem man analog zu dem bei Gleichung (28) angeführten Übertragungsprinzip jeden vierdimensionalen Klammerfaktor (23456) durch den fünfdimensionalen Faktor $(A23456)$ ersetzt: Es gibt im R_5 14 lineare Räume R_3, die 8 gegebene Geraden schneiden. Eine Verallgemeinerung auf den R_n liegt auf der Hand und liefert mühelos die im § 1 gegebene Formel (2).

Es ist mir bisher nicht gelungen für die in (38) stehende Invariante S den expliziten Ausdruck zu finden. Man müßte hierzu eine Übersicht haben über ein volles Invariantensystem von sieben Geraden im R_4. Bei höchstens 5 Geraden ist das volle System unschwer zu ermitteln[5]. Man hat neben dem Typus

$$1_{23,45} = (12^2\,3^2)\,(14^2\,5^2) = -\,1_{45,12} \tag{39}$$

noch die Invariante

$$J_{123,45} = (1234^2)\,(1235^2) = -\,J_{123,54} = J_{213,45} = \ldots \tag{40}$$

(alternierend in 45 und symmetrisch in 123), die bei weniger als 5 Geraden verschwindet. Überdies ist

$$J_{123,45} = -\,J_{234,15} + \tfrac{1}{2}\,3_{14,25} + \tfrac{1}{2}\,2_{14,35}. \tag{41}$$

Die geometrische Bedeutung von $1_{23,45} = 0$ ist aus (39) abzulesen: Die Gerade 1^2 schneidet die Schnittebene der beiden R_3 $(2^2\,3^2)$ und $(4^2\,5^2)$. Wir haben bei (39) zyklische Symmetrie bezüglich 123 (und bezüglich 145):

$$1_{23,45} + 2_{31,45} + 3_{12,45} = 0. \tag{42}$$

Überdies gilt die Syzygie

$$1_{23,45}\,1_{67,89} + 1_{45,67}\,1_{23,89} + 1_{67,23}\,1_{45,89} = 0. \tag{43}$$

Bei 6 Geraden haben wir die irreduzible Invariante

$$K = (1234^2)\,(15^2\,6^2)\,(25^2\,6^2)\,(35^2\,6^2); \tag{44}$$

$K = 0$ bedeutet, daß die Ebene der drei Punkte A_{56}, B_{56}, C_{56} von der Geraden 4^2 getroffen wird. Dabei ist A_{56} der Schnittpunkt des Raumes $(5^2\,6^2)$ mit der Geraden 1^2. Bei $K = 0$ geht also durch D_{56} auf 4^2 eine Transversalebene T_{123456}.

§ 6. Associierte Räume.

Mit dem Transversalenproblem aufs engste verknüpft ist der Begriff der „associierten Räume". Ich will dies vorerst für Geraden im R_4 verdeutlichen.

Bei allgemeiner Lage der Geraden 1^2, 2^2, ... muß man wenigstens vier (also nicht weniger als vier) Geraden nehmen, wenn eine Linearkombination

$$g_\lambda = \lambda_1 1^2 + \lambda_2 2^2 + \lambda_3 3^2 + \ldots$$

mit wenigstens zwei $\lambda_i \neq 0$ wiederum eine Gerade g_λ darstellen soll. Bei vier Geraden gibt es dann vier Größen λ_i, so daß

$$\mu\, 5^2 = \lambda_1 1^2 + \lambda_2 2^2 + \lambda_3 3^2 + \lambda_4 4^2 \qquad (\mu \neq 0) \tag{45}$$

eine fünfte Gerade 5^2 vorstellt: die zu 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2 „associierte" Gerade.

Notwendig und hinreichend für 5_{ik} = Linienkoordinaten ist dann das identische Verschwinden der Kovariante

$$P(x) = \lambda_1 \lambda_2 (1^2 2^2 x) + \lambda_1 \lambda_3 (1^2 3^2 x) + \ldots + \lambda_2 \lambda_3 (2^2 3^2 x). \tag{46}$$

Hier sind die sechs R_3 $(r^2 s^2)$ in der Tat linear abhängig und man erhält für die λ_i, wenn man z. B. in (46) $x = 1\,(1r^2 s^2)$ setzt und von den Gleichungen (42) Gebrauch macht:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1_{23,24} \cdot 1_{34,32} \cdot 1_{42,43} \\ \lambda_2 = 2_{31,34} \cdot 2_{34,41} \cdot 2_{14,13} \\ \lambda_3 = 3_{41,42} \cdot 3_{12,14} \cdot 3_{24,21} \\ \lambda_4 = 4_{13,12} \cdot 4_{21,23} \cdot 4_{32,31} \end{cases} \tag{47}$$

Man achte hier auf die Struktur der drei Invarianten rechter Hand. So haben wir z. B. bei λ_3 vorerst die Faktoren

$$3_{4.,\,4.} \cdot 3_{1.,\,1.} \cdot 3_{2.,\,2.},$$

wo die ausgeschriebenen Indices 4, 1, 2 syklisch auf 3 folgen. Die Punkte werden dann z. B. in $3_{4.,\,4.}$ durch das Paar 12 ersetzt, so daß 3412 eine gerade Permutation von 1234 bildet.

$$\begin{cases} 4_{13,12} = \mu_1 \\ 1_{23,24} = \mu_2 \\ 2_{31,34} = \mu_3 \\ 3_{41,42} = \mu_4 \end{cases} \text{ so wird nach (47): } \begin{cases} \lambda_1 = \mu_2 \mu_3 \mu_4 \\ \lambda_2 = \mu_3 \mu_4 \mu_1 \\ \lambda_3 = \mu_4 \mu_1 \mu_2 \\ \lambda_4 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \end{cases} \tag{48}$$

und die zu 1^2, 2^2, 3^2 und 4^2 associierte Gerade kann man dann in der Form schreiben:

$$\mu\, 5^2 = \frac{1^2}{\mu_1} + \frac{2^2}{\mu_2} + \frac{3^2}{\mu_3} + \frac{4^2}{\mu_4} \tag{49}$$

---

[5] Vgl. meine Arbeit: Die projektiven Invarianten von vier und fünf Geraden im R_4; Proceed. Amsterdam **42** (1939), p. 245—252.

Man zeigt leicht, daß die Beziehung der fünf Geraden wechselseitig ist, d. h. daß z. B. auch 1^2 die zu 2^2, 3^2, 4^2 und 5^2 associierte ist usf.[6].

Alle Ebenen, die im R_4 vier Geraden 1^2 bis 4^2 treffen, schneiden auch die associierte dieser vier Geraden. Es gilt aber bei allgemeiner Lage der vier Geraden 1^2 bis 4^2 auch die Umkehrung: Wenn eine Gerade von allen ∞^2 Ebenen, die vier gegebene Geraden 1^2 bis 4^2 schneiden, getroffen wird, so ist sie die associierte. Hieraus folgt z. B., daß die fünf Transversalebenen T_{123456} von sechs Geraden im R_4 fünf associierte Ebenen sind.

Die Figur von fünf associierten Geraden im R_4 wird besonders durchsichtig, wenn wir die ∞^6 Geraden des R_4 als Punkte auf der *Grassmann*'schen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_6^5$ in einem projektiven Raum $\mathfrak{R}_9$ auffassen. Durch vier Punkte auf der $\mathfrak{M}_6^5$ ist ein linearer Raum $\mathfrak{R}_3$ bestimmt, der die $\mathfrak{M}_6^5$ in einem fünften Punkte trifft. Dieser fünfte Punkt ist das Bild der associierten Geraden.

Es ist unschwer dies zu verallgemeinern und so zum Begriffe der associierten Räume zu gelangen. Es sei dies z. B. für die Ebenen im R_5 angedeutet.

Die ∞^9 Ebenen des R_5 können auf eine *Grassmann*'sche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_9^{42}$ von neun Dimensionen und vom Grade 42 in einem linearen $\mathfrak{R}_{19}$ abgebildet werden. Ein Linearer $\mathfrak{R}_{10}$ allgemeiner Lage, der durch 11 Punkte auf der $\mathfrak{M}_9^{42}$ gegeben ist, schneidet dann diese *Grassmann*'sche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_9^{42}$ in 31 weiteren Punkten. Diese letzteren sind Bildpunkte von 31 Ebenen, die zu den 11 gegebenen Ebenen associiert sind. Es ist deutlich, daß die ersten 11 Ebenen durch andere aus den 31 weiteren ersetzbar sind: die Figur der 42 associierten Ebenen bleibt dieselbe.

Die Zahl 11 kann im allgemeinen nicht durch eine kleinere ersetzt werdem; erst von $h = 11$ an ist es möglich, daß die 20 Größen

$$\pi_{ijk} = \lambda_1 p_{ijk}^{(1)} + \lambda_2 p_{ijk}^{(2)} + \ldots + \lambda_h p_{ijk}^{(h)} \quad (p_{ijk} = \text{Ebenenkoordinaten}) \tag{50}$$

wieder die Koordinaten einer Ebene im R_5 sind.

Zu 9 gegebenen Ebenen in allgemeiner Lage gibt es im R_5 42 Transversalebenen; es ist leicht zu zeigen, daß diese 42 Ebenen associiert sind.

---

[6] Wenn die Geraden 1^2 bis 4^2 vier Erzeugende einer nicht abwickelbaren Regelfläche im R_4 sind, 5^2 die hierzu associierte Gerade ist, so nähert sich, wenn die vier Geraden zusammenrücken, auch 5^2 einer Grenzlage. Diese Tatsache der Differentialgeometrie im R_4 wurde in einer Reihe von Arbeiten vom Verfasser untersucht: „Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4", 1. bis 8. Mitteilung, Proceed. Amsterdam, **43**, **44**, **45** (1940—1942). Vgl. auch *W. J. Bos*, Dissertation Amsterdam (1942).

Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien.

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 7 Abbildungen.

(Eingelangt am 7. April 1953.)

1. Einleitung.

Die ∞^2 geodätischen Linien einer *Drehfläche* Φ lassen sich auf Grund der Rotationssymmetrie nach ∞^1 Drehscharen ordnen, die jeweils ∞^1 kongruente Exemplare umfassen. Die ∞^2 Tangenten g der in einer solchen Drehschar enthaltenen Kurven k bilden eine gewisse *Rotationskongruenz* $\mathfrak{K}$, deren eine Brennfläche von der Grundfläche selbst dargestellt wird, während die zweite Brennfläche eine davon verschiedene Drehfläche Ψ ist, die als „*Leitfläche*" der Kurvenschar k angesprochen wird, da sie von sämtlichen Tangenten und Schmiegebenen der Kurven k berührt wird. Die Schmiegebenen geodätischer Linien sind zur Grundfläche normal, die Tangentialebenen der beiden Brennflächen in den Berührungspunkten eines Kongruenzstahls g — seine „Brennebenen" — schließen also einen rechten Winkel ein: $\mathfrak{K}$ ist eine *Normalenkongruenz*. Die in einer Strahlkongruenz enthaltenen *Torsen* stützen sich mit ihrer Gratlinie auf eine Brennfläche und sind der anderen berührend umschrieben; im Falle einer Normalenkongruenz sind die Gratlinien — wegen der Orthogonalität der Brennebenen — *geodätische Linien* der sie tragenden Brennfläche. Im vorliegenden Falle sind die in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Torsen einerseits die Tangentenflächen der Ausgangsschar k auf Φ, anderseits die Tangentenflächen einer gewissen Schar von geodätischen Linien l auf Ψ. Die Beziehung zwischen den Drehflächen Φ und Ψ ist mithin eine durchaus wechselseitige.

Einer Drehfläche Φ werden auf diese Weise ∞^1 Leitflächen Ψ ihrer geodätischen Linien zugeordnet, und es wäre zu erwarten, daß weiterhin zu diesen ∞^1 Drehflächen Ψ insgesamt ∞^2 analoge Leitflächen ihrer eigenen Geodätischen — darunter natürlich auch die Ausgangsfläche Φ —

gehören. Das ist nun merkwürdigerweise nicht der Fall, sondern es ergeben sich nur ∞^1 sekundäre Leitflächen, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird. *Jede beliebig vorgegebene Drehfläche läßt sich damit in ein bestimmtes einparametriges System gleichberechtigter Drehflächen Φ einbetten, zu welchem ein Orthogonalsystem von ∞^1 Drehflächen Ψ gehört, so zwar, daß die Tangenten jeder geodätischen Linie einer Fläche 1. Art eine bestimmte Fläche 2. Art berühren, und umgekehrt.* Für die Drehflächen 2. Grades ist dieses Verhalten auf Grund der klassischen Untersuchungen von *M. Chasles* über die konfokale Schar längst bekannt[1], die allgemeine Gültigkeit für beliebige Drehflächen scheint jedoch noch nicht bemerkt worden zu sein.

Eine unmittelbare Folge des genannten Sachverhaltes ist ein eigentümliches *darstellend-geometrisches Phänomen*: Bei beliebiger Normalprojektion des Flächensystems (Φ, Ψ) auf eine Ebene bilden hier die Umrißlinien ein orthogonales Netz, das zum Meridiansystem ähnlich ist, bei irgendwelchen Verlagerungen des Flächensystems also nur seinen Maßstab, nicht aber seine gestaltliche Struktur ändert.

Als charakteristisch für das Flächensystem (Φ, Ψ) erweist sich die auf der gemeinsamen Achse vorhandene *Korrespondenz* zwischen den Fußpunkten der Meridiantangenten und -normalen. Die Bestimmung des zu einer willkürlich vorgelegten Korrespondenz gehörigen Flächensystems erfordert eine einfache Quadratur, während das zu einer gegebenen Einzelfläche Φ_1 gehörige Bett- und Leitsystem ohne Integration zu finden ist; es besteht aus lauter algebraischen Flächen, wenn Φ_1 algebraisch ist. Spezielles Interesse kommt der Annahme einer *projektiven Korrespondenz* zu, die ausführlich diskutiert wird; der Sonderfall einer involutorischen Projektivität führt dabei auf die konfokalen Scharen von Drehflächen 2. Grades, der Sonderfall einer Ähnlichkeit auf Drehflächen, die bereits jede für sich die merkwürdige Eigenschaft haben, einen Normalumriß unveränderlicher Gestalt zu besitzen.

Ein tieferer Einblick in die Bauart des Flächensystems (Φ, Ψ) läßt sich durch Einsatz der *zyklographischen Abbildung* erzielen. Man kann nämlich die einer Ebene angehörenden Meridiankurven als Bilder eines einfacher gebauten Systems ebener Kurven auffassen, das aus zwei *korrelativen Affinscharen* besteht. Auf diese Weise läßt sich beispielsweise die Auswirkung des Überganges von einer Grundfläche zu einer

[1] *M. Chasles:* Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre. Journ. math. pur. appl. 11 (1846), 5—20.

Parallelfläche sehr übersichtlich verfolgen; als Anwendung hiervon wird das Bett- und Leitsystem des *Torus* gewonnen.

2. Geometrische Grundlagen.

Sei Φ_1 eine beliebige *Drehfläche* mit der Achse x, und bezeichne T einen allgemeinen Flächenpunkt. Der Achsenschnittpunkt U bzw. V der zugehörigen Tangentialebene τ bzw. Flächennormale n möge der *„1. bzw. 2. Achsenpunkt" des Flächenelementes* (T, τ) heißen. Durch ein Achsenpunktepaar U, V sind umgekehrt ∞^2 Flächenelemente (T, τ) bestimmt, deren Punkte die durch den Durchmesser UV festgelegte Kugel Γ erfüllen; diese wird im folgenden kurz *„Ordnerkugel"* genannt.

Fassen wir nun eine durch T gehende *geodätische Linie* k von Φ_1 ins Auge: Die zu T gehörige Tangente g und die Schmiegebene σ berühren eine der einleitend erwähnten Leitflächen Ψ in einem Punkt S, dessen Normale wegen $\sigma \perp \tau$ in τ liegt und daher die Achse x im Punkt U trifft; σ selbst enthält anderseits mit der Normale n auch deren Achsenpunkt V. Unter Veränderung der Fortschreitrichtung g ist damit zu erkennen: *Alle* ∞^1 *zu einem Flächenelement* (T, τ) *gehörigen Leitelemente* (S, σ) *besitzen als gemeinsame Achsenpunkte die vertauschten Achsenpunkte von* (T, τ). Die Punkte S erfüllen den in der Ebene τ liegenden *Kreis* der Ordnerkugel Γ, also den Kreis mit dem Durchmesser TU.

Durch Drehung um die Flächenachse gehen aus (T, τ) die ∞^1 Flächenelemente längs eines Parallelkreises von Φ_1 hervor, dem die ∞^1 von den Leitelementen (S, σ) erzeugten Parallelkreisstreifen der Leitflächen Ψ zugeordnet sind. Unter Beschränkung auf die Betrachtung der Verhältnisse in einer *Meridianebene* gilt mithin nach dem vorhin Gesagten: *Zu jedem Meridianelement* (T, t) *der gegebenen Drehfläche* Φ_1 *gehören* ∞^1 *Meridianelemente* (S, s) *der Leitflächenschar* Ψ, *deren gemeinsame Achsenpunkte die vertauschten Achsenpunkte von* (T, t) *sind* (Abb. 1). Die Punkte S erfüllen, solange nur reelle Fortschreitrichtungen g in Betracht gezogen werden, jenen durch T und seinen Spiegelpunkt begrenzten Bogen des „Ordnerkreises" über dem Durchmesser UV, der den Punkt U enthält, doch sollen in Hinkunft derartige Realitätsgrenzen nicht weiter beachtet werden.

Die ∞^1 Meridianelemente (T, t) der Ausgangsfläche Φ_1 führen nun über die zugehörigen Achsenpunktepaare U, V zu ∞^2 Meridianelementen (S, s) der Leitflächen Ψ, deren Meridiansystem sich dann durch *Integration* dieser Elemente ergibt. Diese Integration wird erst in Abschn. IV

tatsächlich ausgeführt werden, doch ist bereits jetzt zu erkennen, daß die Leitflächenschar lediglich von der auf der Achse x herrschenden *Punktverwandtschaft* $\mathfrak{P} = U \to V$ abhängt, die in Hinkunft „*Begleitkorrespondenz*" von Φ_1 heißen soll. Umgekehrt legt die Korrespondenz $\mathfrak{P}$ die Fläche Φ_1 nicht eindeutig fest, sondern gehört gleichzeitig zu ∞^1 gleichberechtigten koachsialen Drehflächen Φ, die ein System von gleicher Beschaffenheit wie die Leitflächen Ψ bilden; letztere sind offensichtlich durch die inverse Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P}^{-1}$ gekennzeichnet. Zwischen den beiden Flächensystemen herrscht nach allem eine gewisse Wechselbeziehung: *Jede einzelne der Flächen Φ führt auf dasselbe Leitflächensystem Ψ, und umgekehrt wird jeder einzelnen Fläche Ψ als Leitflächenschar das System der Flächen Φ zugeordnet.* Das bedeutet ausführlich: *Die Tangenten (und Schmiegebenen) einer beliebigen auf einer der Flächen gezogenen geodätischen Linie berühren sämtlich eine bestimmte Fläche der anderen Schar*[2].

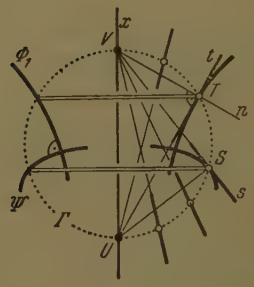

Abb. 1.

Jedem Punkt $T = S$ eines Ordnerkreises sind zwei Meridianelemente (T, t) und (S, s) zugeordnet, die einen rechten Winkel bilden: *Die Flächenscharen Φ und Ψ durchsetzen einander mithin orthogonal.* Die zur Leitfläche Ψ gehörigen geodätischen Linien der Fläche Φ gehen an jene Schnittkreise, in welchen die beiden Flächen einander senkrecht durchsetzen, berührend heran und weisen daselbst aus Symmetriegründen *Henkelpunkte* (Punkte mit vierpunktig berührender Schmiegebene oder unendlichem Schmiegkugelradius) auf[3].

Betrachten wir nun eine *Normalprojektion* des Flächensystems (Φ, Ψ) auf eine beliebige Bildebene π, wobei nur der triviale Fall $\pi \perp x$ ausgeschlossen sein soll; die Bildelemente mögen durch einen Akzent markiert werden. Jeder *Umrißpunkt* T einer Fläche Φ besitzt eine projizierende Tangentialebene τ, also eine zu π parallele Flächennormale n. Der rechte Winkel $\tau n = UTV$ erscheint auch in der Projektion

[2] Umgekehrt braucht nicht jede Flächenkurve, deren Tangenten eine Leitfläche berühren, unbedingt eine Geodätische zu sein. Dies ist wohl beim klassischen System der konfokalen Quadriken stets der Fall, gilt jedoch nicht mehr, wenn eine Gerade von mehr als einer Leitfläche berührt wird.

[3] Es ist zu beachten, daß die beiden Flächen auch Parallelkreise gemein haben können, in welchen sie einander schräg durchsetzen, falls nämlich die Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P}$ so geartet ist, daß sie durch einen Raumpunkt mehrere Ordnerkugeln sendet, was im allgemeinen der Fall sein wird.

als rechter Winkel $\tau' n' = U' T' V'$, und die („scheinbare") *Umrißlinie* von Φ ist ähnlich wie die Meridiankurve durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre Tangenten und Normalen jeweils durch zwei in bestimmter Weise gekoppelte Achsenpunkte U' und V' laufen. Die Punktverwandtschaft $\mathfrak{P}' = U' \to V'$ auf dem Achsenbild x' geht durch Projektion aus der Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P} = U \to V$ hervor, ist mithin zu dieser *ähnlich*, und dasselbe gilt von der Schar der zugehörigen Integralkurven: *Die Schar der Umrißlinien des Flächensystems Φ ist zur Schar der Meridiankurven ähnlich.* Gleiches gilt für das Leitsystem Ψ, und der gemeinsame Verkleinerungsfaktor hat den Wert $\cos(xx')$. Es liegt hier ein merkwürdiges *optisches Phänomen* vor, indem das Erscheinungsbild des (durchsichtig zu denkenden) Flächensystems (Φ, Ψ) — immer Normalprojektion vorausgesetzt — stets ein orthogonales Kurvennetz ganz bestimmter Struktur darstellt, das bei Veränderung der Achsenlage lediglich eine Maßstabsänderung erfährt.

Das *Hüllgebilde* der zur Korrespondenz $\mathfrak{P}$ gehörigen ∞^1 Ordnerkugeln Γ ist eine gewisse *Drehfläche* Δ, die, falls sie reell ist, als Grenze des Realitätsgebietes für das durch $\mathfrak{P}$ bestimmte Flächensystem (Φ, Ψ) fungiert. Sämtliche Systemflächen setzen auf Δ mit Parallelkreisen auf, die *Rückkehrkanten* abgeben. Entsprechend besitzt das System der ∞^1 Ordnerkreise der Projektionskorrespondenz $\mathfrak{P}'$ eine Hüllkurve, die zum Meridian von Δ ähnlich ist und die Umrißspitzen der Systemflächen trägt.

3. Zyklographische Deutung des Meridiansystems.

Ein tieferer Einblick in die bestehenden Zusammenhänge eröffnet sich durch Heranziehung der *Zyklographie*. Das auf *E. Laguerre* und *W. Fiedler* zurückgehende zyklographische Abbildungsprinzip, das insbesondere von *E. Müller* weitgehend ausgebaut wurde[4], bildet die *Punkte* des dreidimensionalen Raumes auf die *orientierten Kreise* (*Zykel*) einer Bildebene in der Weise ab, daß es jedem Raumpunkt $\mathfrak{T}$ den Spurkreis $\mathfrak{T}^z$ jenes von $\mathfrak{T}$ ausstrahlenden Drehkegels mit rechtem Öffnungswinkel zuordnet, dessen Achse zur Bildebene senkrecht ist; der Bildkreis ist ferner noch mit dem positiven oder negativen Umlaufsinn zu versehen, je nachdem $\mathfrak{T}$ auf der einen oder anderen Seite der Bildebene liegt. Beschreibt $\mathfrak{T}$ irgend eine (glatte) Raumkurve $\mathfrak{f}$, so

[4] *E. Müller - J. Krames:* Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II. Bd. — Wien 1929).

durchläuft sein Bildzykel $\mathfrak{T}^z$ eine einparametrige Schar, deren (orientiertes) Hüllkurvenpaar $\mathfrak{f}^z$ als zyklographisches Bild der Kurve $\mathfrak{f}$ gilt. Jedem *Linienelement* ($\mathfrak{T}$, t) von $\mathfrak{f}$ erscheint dabei jenes Paar orientierter Linienelemente (T, t) von $\mathfrak{f}^z$ zugewiesen, in welchem $\mathfrak{f}^z$ von $\mathfrak{T}^z$ berührt wird. Da die beiden Tangentenspeere t als zyklographische Bilder der Kurventangente t aufgefaßt werden können, so haben sie den Spurpunkt von t gemein. Diese Kenntnisse reichen für das folgende aus.

Wir wollen nun umgekehrt das in einer festen Achsenebene $\alpha = xy$ gelegene, bezüglich der Achse x spiegelbildliche und geeignet orientierte Meridiankurvenpaar f einer Drehfläche Φ als zyklographisches Bild einer *Urkurve* $\mathfrak{f}$ auffassen, die aus Symmetriegründen in der zu α normalen Achsenebene β liegt. Jedem zu x spiegelbildlichen Elementenpaar (T, t) von f entspricht nach dem vorhin Gesagten ein Linienelement ($\mathfrak{T}$, t) von $\mathfrak{f}$, dessen Punkt auf dem im Normalenfußpunkt V von (T, t) errichteten Lot liegt, und dessen Gerade durch den Fußpunkt U von t geht; die Kote $z = V\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{T}$ ist dabei gleich der Normalenstrecke VT von f (Abb. 2).

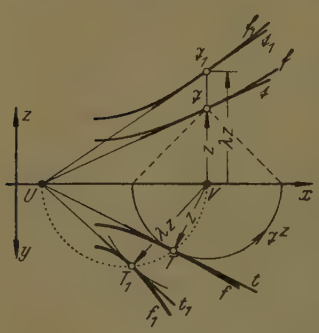

Abb. 2.

Denkt man sich auf die Kurve $\mathfrak{f}$ eine *affine Streckung* $\mathfrak{A}$ ausgeübt, die alle Koten z mit demselben Faktor λ multipliziert, so bleiben die Tangentenfußpunkte U und die Ordinatenfußpunkte V unverändert und stellen nach wie vor die Tangenten- und Normalenfußpunkte der neuen Bildelemente (T_1, t_1) dar. Die zyklographische Bildkurve f_1 der zu $\mathfrak{f}$ affinen Kurve $\mathfrak{f}_1$ besitzt mithin dieselbe Begleitkorrespondenz wie f, ist also Meridian einer der Bettschar von Φ angehörenden Drehfläche Φ_1. Umgekehrt ausgedrückt: *Die zyklographischen Urbilder des Meridiansystems einer Bettschar Φ oder der zugehörigen Leitschar Ψ erfüllen je eine Affinschar von ebenen Kurven, die durch gleichförmige Streckung bzw. Stauchung der Achsenabstände auseinander hervorgehen*[5].

[5] Legt man sich bei der zyklographischen Abbildung nicht unbedingt auf einen rechten Öffnungswinkel der Projektionskegel fest, sondern läßt man auch andere Öffnungswinkel ω zu, so könnte jedes der beiden Meridiansysteme als Bildkurvenschar einer einzigen Urkurve $\mathfrak{f}$ aufgefaßt werden, die der Reihe nach mit verschiedenen Öffnungen ω auf dieselbe Ebene abgebildet wird.

Mit der gegebenen Deutung ist nun nicht nur eine einfache *Konstruktionsvorschrift für die Bettschar* gefunden, die im wesentlichen auf eine proportionale Änderung der Normalenstrecken hinausläuft ($VT_1 = \lambda \,.\, VT$, Abb. 2), sondern gleichzeitig auch eine klare Übersicht über die *Struktur* der Schar gewonnen.

Allfällig vorhandene zur Bildebene *normale Tangenten* t sind allen Kurven der beiden Affinscharen gemeinsam, und da sie auf isotrope Tangenten t führen, sind ihre Spurpunkte $U = V$ — also die Doppelpunkte der Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P}$ — *gemeinsame Brennpunkte* der Meridianscharen. In diesem Sinne kann mithin das Flächensystem (Φ, Ψ) als „konfokal" bezeichnet werden. — Allfällige zur Bildebene *parallele Tangenten* t (U bzw. V im Unendlichen) geben zu *gemeinsamen Kehl-* oder *Gürtelkreisebenen* Anlaß, die allerdings jeweils nur für eine der beiden Flächenscharen gelten; dafür ist der Achsenpunkt (V bzw. U) einer solchen Ebene gemeinsame Spitze von Asymptotenkegeln der anderen Schar (vgl. Abb. 6).

4. Analytische Auswertung.

Zur rechnerischen Behandlung sei ein Normalkoordinatensystem x, y, z vorausgesetzt, dessen Abszissenachse mit der Rotationsachse des Flächensystems identisch ist. Bezeichnen u und v die Abszissen der Achsenpunkte U und V, so wird durch eine Relation

$$F(u, v) = 0 \tag{1}$$

eine bestimmte *Korrespondenz* $\mathfrak{P} = U \to V$ beschrieben. Als erstes soll das zugehörige Flächensystem Φ bestimmt werden, und zwar auf dem Wege über das dem der xy-Ebene angehörenden Meridiansystem f zugeordnete zyklographische Urbildsystem $\mathfrak{f}$ in der xz-Ebene (Abb. 2).

Die Forderung, daß die Tangente t eines Kurvenpunktes $\mathfrak{T}$ $(x = v, z)$ den Punkt U $(u, 0)$ enthalte, führt auf die Bedingung

$$\frac{dz}{dv} = \frac{z}{v - u}.$$

Integration nach Trennung der Variablen liefert dann als Darstellung der *Affinschar* $\mathfrak{f}$:

$$\boxed{z = c \,.\, \zeta(v) \text{ mit } \zeta = \exp \int \frac{dv}{v - u},} \tag{2}$$

wobei u gemäß (1) durch die Abszisse v ausgedrückt zu denken ist. —

Nunmehr sind die Koordinaten des zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Meridianpunktes $T(x, y)$ aus den im rechtwinkligen Dreieck TUV (Abb. 2) geltenden Beziehungen

$$(v—x)(v—u) = z^2,\ (v—x)(x—u) = y^2$$

elementar zu bestimmen. Man findet so als Parameterdarstellung für die Meridiane der *Flächenschar* Φ:

$$x = v - \frac{c^2\zeta^2}{v-u},\quad y = c\zeta\sqrt{1-\left(\frac{c\zeta}{v-u}\right)^2} \tag{3}$$

Für die zugehörige *Leitflächenschar* Ψ, die ja durch die inverse Korrespondenz $\mathfrak{P}^{-1}$ gekennzeichnet wird, also nur den Tausch von u und v verlangt, lauten die Gleichungen der entsprechenden Affinschar $\mathfrak{f}^*$ — jetzt mit u als Abszisse —

$$z^* = c^*\frac{v-u}{\zeta}, \tag{2*}$$

bzw. des Meridiansystems

$$x^* = u + c^{*2}\frac{v-u}{\zeta^2},\quad y^* = c^*\frac{v-u}{\zeta}\sqrt{1-\frac{c^{*2}}{\zeta^2}} \tag{3*}$$

ζ hat auch hier die in (2) festgelegte Bedeutung. — Zu beachten ist, daß für reelle Flächen unter Umständen auch rein-imaginäre Werte der Integrationskonstanten c und c^* in Betracht zu ziehen sind.

Spezielle Beispiele zur Anwendung dieser Formeln enthält Abschnitt V.

Ist nicht die Korrespondenz $\mathfrak{P}$ vorgegeben, sondern eine *Einzelfläche* Φ_1 — etwa durch die Meridiangleichung $Y = Y(X)$ —, so werden zunächst die Achsenpunkte U und V von Meridiantangente und -normale durch ihre Koordinaten

$$u = X - \frac{Y}{Y''},\ v = X + YY'$$

festgelegt, wobei $Y' = dY/dX$. Ein partikulärer Wert von $c\zeta$ ist ferner durch die Normalenstrecke

$$c_1\zeta = Y\sqrt{1+Y'^2}$$

gegeben, so daß sich mittels (3) das Φ_1 aufnehmende *Bettsystem* Φ ohne Integration unmittelbar hinschreiben läßt:

$$x = X + (1 - \lambda^2)\, Y\, Y', \quad y = \lambda\, Y \sqrt{1 + (1 - \lambda^2)\, Y'^2} \tag{4}$$

Hierbei wurde lediglich $c/c_1 = \lambda$ gesetzt; λ ist mit dem in Abb. 2 eingetragenen Streckungsfaktor identisch, so daß für $\lambda = 1$ die Ausgangsfläche Φ_1 und für $\lambda = 0$ die auf die Achse zusammengeschrumpfte Fläche erhalten wird. — Aus (3*) fließt analog die Darstellung des *Leitsystems* Ψ

$$x^* = X - \frac{Y}{Y'} + \frac{C^2}{Y\, Y'}, \quad y^* = \frac{C}{Y'} \sqrt{1 + Y'^2 - \frac{C^2}{Y^2}} \tag{5}$$

Hierbei wurde $c^* c_1 = C$ gesetzt. Die einfache geometrische Bedeutung dieser Konstante tritt zu Tage, wenn man aus den rechtwinkeligen Dreiecken USV und UTV das Streckenverhältnis

$$US : UT = \sqrt{(x^* - u)\,(v - u)} : \sqrt{(X - u)\,(v - u)} = C : Y$$

berechnet, das wegen $US \perp ST$ den Sinus des Meridianschnittwinkels ϑ der zur Leitfläche Ψ_C gehörigen geodätischen Linien von Φ_1 angibt. Mit der Aussage

$$Y \,.\, \sin\vartheta = C \tag{6}$$

ist der bekannte Satz von *A. Clairaut* gefunden, demzufolge *längs einer Drehflächengeodätischen der Sinus des Meridianschnittwinkels zum Parallelkreisradius umgekehrt proportional* ist[6]. C gibt demnach den Radius jener Parallelkreise an, die von den Geodätischen der betrachteten Schar berührt werden ($\vartheta = \pi/2$), und in welchen Φ_1 und Ψ_C einander rechtwinklig schneiden.

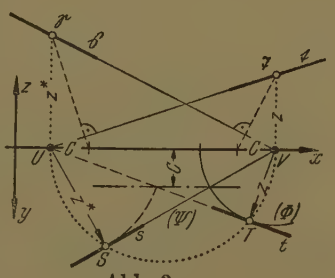

Abb. 3.

Auf Grund dieser Bemerkung läßt sich nun die in der unteren Hälfte von Abb. 3 niedergelegte *Konstruktionsvorschrift für die Leitschar* anschaulich erklären: Um für eine festgesetzte Clairaut-Konstante C das zu einem Meridianelement (T, t) der Grundfläche gehörige Meridianelement (S, s) der Leitfläche zu ermitteln, wähle man vorübergehend für Φ die das Element (T, t) berührende *Kugel* (Mitte V); da die Geo-

[6] *A. Clairaut:* Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne. Mém. ac. sci. Paris, 1733, 406—416.

dätischen einer Kugel Großkreise sind, treten als Leitflächen Ψ konzentrische *Drehkegel* mit der Achse x auf, und unter diesen ist lediglich jener auszuwählen, der mit der Kugel ein Parallelkreispaar vom Radius C gemein hat. Bei der zeichnerischen Durchführung ist also lediglich der durch T gehende Kreis um V mit einer im Abstand C von der Achse gezogenen Parallelen zu schneiden; die Verbindungsgerade eines solchen Schnittpunktes mit V gibt bereits die Leitflächentangente s an, deren Berührungspunkt S dann im Fußpunkt des aus U fällbaren Lotes gefunden wird[7]. — Ein direkter Beweis dieser Konstruktion ließe sich über die aus (2) und (2*) fließende Beziehung

$$zz^* = C\,(v—u) \tag{7}$$

zwischen den beiden Normalenstrecken $VT = z$ und $US = z^*$ führen. Hieraus folgt dann übrigens, daß die beiden *Subnormalen* $z^2/(v—u)$ und $z^{*2}/(u—v)$ das *konstante Produkt* $—C^2$ haben.

Die zu einer bestimmten Clairaut-Konstante C gehörige *Berührungstransformation* $(T,\ t) \to (S,\ s)$ in der Meridianebene α (Abb. 3, untere Hälfte) induziert über die zyklographische Deutung eine neue Berührungstransformation $(\mathfrak{T},\ \mathfrak{t}) \to (\mathfrak{S},\ \mathfrak{s})$ in der zu α normalen Meridianebene β (Abb. 3, obere Hälfte). Um über die zweite Transformation Aufschluß zu erhalten, lasse man ein Element $(\mathfrak{T},\ \mathfrak{t})$ eine Drehung um den festgehaltenen Punkt $\mathfrak{T}$ ausführen: Das Bildelement $(T,\ t)$ gleitet dabei am Bildzykel von $\mathfrak{T}$ entlang, das zugehörige Leitelement $(S,\ s)$ verschiebt sich längs der Gerade s und dementsprechend verschiebt sich das Element $(\mathfrak{S},\ \mathfrak{s})$ längs der Gerade $\mathfrak{s}$. Hieraus geht aber hervor, daß es sich bei der Transformation $(\mathfrak{T},\ \mathfrak{t}) \to (\mathfrak{S},\ \mathfrak{s})$ einfach um eine gewisse *Korrelation* $\mathfrak{B}$ handelt, die jedem Punkt $\mathfrak{T}$ eine bestimmte Gerade $\mathfrak{s}$ und entsprechend jeder Gerade $\mathfrak{t}$ einen bestimmten Punkt $\mathfrak{S}$ zuordnet. Die bilineare Gleichung dieser Korrelation fließt unmittelbar aus (7), wenn man x^* statt u und x statt v schreibt, und lautet

$$zz^* = C\,(x—x^*). \tag{8}$$

Läßt man den Punkt $\mathfrak{T}$ eine achsennormale Gerade $x = v$ durchlaufen, so dreht sich die korrespondierende Gerade $\mathfrak{s}$ um den Achsenpunkt $V\ (x^* = v)$ — natürlich in projektiver Weise — und das aus $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{s}$ gefällte Lot beschreibt ein Strahlbüschel, dessen Scheitel auf der Achse und im Abstand C vor V liegt. Damit läßt sich die Korrelation $\mathfrak{B}$ auch konstruktiv einfach beherrschen.

[7] Im Hinblick auf die Gleichberechtigung der beiden Flächenscharen könnte natürlich auch Φ als Drehkegel gewählt und durch eine Leitkugel Ψ ergänzt werden (gestrichelte Konstruktionslinien in Abb. 3).

Aus den Formeln (4) und (5) — wie auch aus den entwickelten Konstruktionen — geht hervor, daß das zu einer *algebraischen* Drehfläche Φ_1 gehörige Bett- und Leitsystem (Φ, Ψ) durchwegs aus algebraischen Flächen besteht. Beispiele solcher algebraischen Systeme werden in den nächsten Abschnitten auftreten.

5. Projektive Begleitkorrespondenzen.

Als einfachste Annahme verdient der Fall einer *Projektivität als Begleitkorrespondenz* $\mathfrak{P}$ von vornherein ein gewisses Interesse. Die Korrespondenzgleichung (1) ist jetzt bilinear; je nach der Rolle des Fernpunktes — ob dieser zweifacher, einfacher oder kein Doppelpunkt ist — müssen drei Unterfälle unterschieden werden.

1. Schiebung:

Bezeichnet a die Schiebstrecke, so lautet die Korrespondenzgleichung

$$v = u + a. \tag{9}$$

Die Hilfsgröße ζ aus (2) hat dann den Wert

$$\zeta = e^{v/a}. \tag{10}$$

Für die Affinschar der zyklographischen Urbilder $\mathfrak{f}$ ergibt sich damit gemäß (2) das System kongruenter *Exponentialkurven*

$$z = c \cdot e^{v/a}. \tag{11}$$

Wird ferner durch die Substitution $z/a = \cos\theta$ der Neigungswinkel θ der Normale gegen die Achse als neuer Parameter eingeführt, so gelangt man über (3) zur folgenden Darstellung des Meridiansystems der Flächenschar Φ:

$$\begin{aligned} x &= a\,(\sin^2\theta + \ln\cos\theta) + \text{const} \\ y &= a \sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Flächen Φ sind naturgemäß untereinander *kongruent* und gehen durch Schiebung längs der x-Achse auseinander hervor. Spiegelung an einer achsennormalen Ebene verwandelt sie in die gleichartigen Leitflächen Ψ. Das Aussehen dieser transzendenten Flächen, die auf dem *Hüllzylinder* Δ der (kongruenten) Ordnerkugeln unter $\pm 45^0$ mit je einem Rückkehrkreis aufsetzen, ist aus der unteren Hälfte von Abb. 4 zu entnehmen.

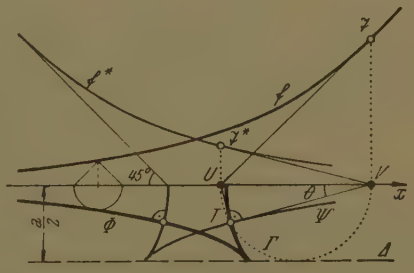

Abb. 4.

2. Ähnlichkeit:

Bezeichnet α den Ähnlichkeitsfaktor und wird der Ursprung im eigentlichen Doppelpunkt angenommen, so lautet die Korrespondenzgleichung

$$v = \alpha u \quad (\alpha \neq 1). \tag{13}$$

Mit v als unabhängiger Veränderlicher erhält man zunächst aus (2)

$$\zeta = v^\beta \text{ mit } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{14}$$

Die Affinschar der zyklographischen Urbilder $\mathfrak{f}$

$$z = c \,.\, v^\beta \tag{15}$$

besteht mithin aus *allgemeinen Parabeln* ($\beta > 0$) oder *Hyperbeln* ($\beta < 0$) vom Exponenten β. Für das Meridiansystem der Flächen Φ ergibt sich damit zunächst über (3) die Darstellung

$$x = v - \beta\, c^2\, v^{2\beta-1}, \quad y = c\, v^\beta \sqrt{1 - \beta^2\, c^2\, v^{2\beta-2}}.$$

Um der geometrisch evidenten Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Flächen Φ untereinander *zentrisch ähnlich* sind, ersetze man etwa die Konstante βc durch $(\beta c')^{1-\beta}$ und führe anschließend den neuen Parameter $t = v/\beta\, c'$ ein; damit erhält man dann die übersichtlichere Darstellung

$$\begin{aligned} x &= c' \,(\beta\, t - t^\gamma) \\ y &= c' \sqrt{t^\gamma \,(t - t^\gamma)} \end{aligned} \quad \text{mit } \gamma = 2\,\beta - 1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}. \tag{16}$$

Der verwendete Parameter t hängt übrigens mit dem *Normalenwinkel* $\theta = \arccos z/(v-u)$ durch die einfache Beziehung

$$t = \cos^{\alpha-1} \theta$$

zusammen. Unter diesen Umständen liegt es nahe, auf *polare Speerkoordinaten* überzugehen, d. h. die (orientierten) Meridiantangenten durch ihren (vorzeichenbegabten) Ursprungsabstand p und dessen Richtungswinkel θ zu erfassen. Mit Rücksicht auf $p = u \cos\theta$ erhält man dann für die Meridiankurve von Φ die einfache Liniengleichung

$$p = c'' \,.\, \cos^\alpha \theta, \tag{17}$$

wobei $c'' = c'/(\alpha - 1)$. Aus dieser Darstellung ist jetzt die Meridiankurve als *Polarreziproke der Clairautschen Multiplikatrix* $r \cos^\alpha \theta = \text{const}$ bezüglich eines konzentrischen Kreises zu erkennen; auch ihre Fußpunktkurve $r = c'' \cos^\alpha \theta$ ist eine Multiplikatrix[8].

[8] *G. Loria - F. Schütte:* Spezielle algebraische und transzendente Kurven (Leipzig—Berlin 1910); I, 384ff.

Die vorliegenden Drehflächen und ihre Ähnlichkeitsscharen sind auch hin-

Die analogen Entwicklungen für die Ähnlichkeitsschar der Leitflächen Ψ können hier übergangen werden, da — entsprechend der inversen Ähnlichkeit $\mathfrak{P}^{-1}$ — in den Formeln lediglich α durch den Kehrwert $1/\alpha$ zu ersetzen ist, was den Übergang von β zu $1-\beta$ und Vorzeichenwechsel bei γ bedingt.

Die Hüllfläche Δ der Ordnerkugeln ist ein vom Ursprung ausstrahlender *Drehkegel*, der nstürlich nur für $\alpha > 0$ reell ausfällt und dann den halben Öffnungswinkel $\delta = \arcsin(1/\gamma)$ hat. Die Flächen Φ setzen mit ihren Rückkehrkreisen auf Δ unter $45^0 - \delta/2$ auf, die Orthogonalflächen Ψ unter $135^0 - \delta/2$.

Jede der hier und unter 1. erhaltenen Drehflächen erfreut sich der hübschen Eigenschaft, bei beliebiger Verlagerung bloß eine *ähnliche Veränderung des scheinbaren Umrisses* zu erfahren — Normalprojektion vorausgesetzt —, da die Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P}$ im Bild wieder als Ähnlichkeit gleichen Verhältnisses erscheint. Offensichtlich gibt es sonst keine Drehflächen solchen Verhaltens.

Aus der Bauart der Gleichungen (16) geht hervor, daß sich für *rationales Ähnlichkeitsverhältnis* α stets *algebraische Flächen* einstellen. Um deren Ordnung zu bestimmen, schreibe man den Exponenten γ als gekürzten Bruch

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\mu}{\nu} \text{ mit } (\mu, \nu) = 1 \text{ und } \nu > 0 \qquad (18)$$

und führe $s = t^{1/\nu}$ als neuen Parameter ein. Nach Wegschaffen der Quadratwurzel in der Geradengleichung $y = ax+b$ findet man mit dem Gleichungsgrad in s auch die *Ordnung* der Fläche

$$N = \begin{cases} 2 \max(\mu, \nu), & \text{wenn } \mu > 0 \\ 2(|\mu| + \nu), & \text{wenn } \mu < 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Das einfachste Beispiel gehört zu $\alpha = -1$ ($\gamma = 0$, $N = 2$): Es handelt sich um das System *konfokaler Drehparaboloide*, das wegen $1/\alpha = \alpha$ gleichzeitig auch die Leitflächen umfaßt. Erwähnenswert ist ferner die Annahme $\alpha = 3$ ($\gamma = 2$), weil sie auf Flächen 4. Ordnung führt, die durch Rotation einer *Steinerzykloide* um eine

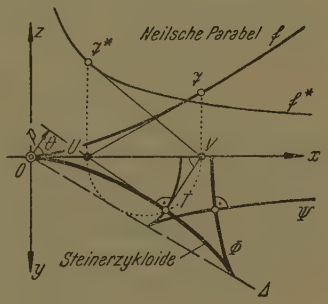

Abb. 5.

sichtlich ihrer *pseudogeodätischen Linien* — Flächenkurven, deren Schmiegebenen eine konstante, jedoch schräge Neigung gegen die Oberfläche aufweisen — von besonderem Interesse. Vgl. diesbezüglich *W. Wunderlich:* Raumkurven, die pseudogeodätische Linien eines Zylinders und eines Kegels sind. Comp. Math. 8 (1950), 169—184.

der Spitzentangenten entstehen; die zugehörigen Leitflächen gehören zu $a^* = 1/3$ ($\gamma^* = -2$) und sind von 6. Ordnung (Abb. 5). Anzuführen wäre endlich noch der Fall $a = 2$ ($\gamma = 3$), bei welchem als zyklographische Urbilder sowohl der Grund- als auch der Leitflächenmeridiane *Kegelschnitte* auftreten, und zwar Parabeln ($\beta = 2$) bzw. gleichseitige Hyperbeln ($\beta^* = -1$); die Meridiankurven selbst sind demnach gewisse *Hyperzykel*, und zwar handelt es sich speziell bei den Flächen Φ um das sogenannte „Maltakreuz", jene Parallelkurve der regulären Astroide, die eine Selbstberührung aufweist.

3. Allgemeine Projektivität:

Wird die allgemeine Projektivität $\mathfrak{P}$ durch die Fluchtpunkte $x = \pm a$ und die Doppelpunkte $x = \pm b$ festgelegt, so schreibt sie sich

$$uv + a(u - v) - b^2 = 0 \qquad (a^2 \neq b^2). \tag{20}$$

Hierzu gehört dann gemäß (2) — mit v als unabhängiger Veränderlicher

$$\zeta = \exp \int \frac{v+a}{v^2-b^2}\, dv = \begin{cases} (v-b)^{\frac{a+b}{2b}} \cdot (v+b)^{\frac{b-a}{2b}} & \text{für } b^2 > 0 \\ v \cdot e^{-a/v} & \text{für } b = 0 \\ \sqrt{v^2+b'^2} \cdot \exp\left(\frac{a}{b'} \operatorname{arctg} \frac{v}{b'}\right) & \text{für } b^2 = -b'^2 < 0 \end{cases} \tag{21}$$

Bei den damit darstellbaren zyklographischen Urbildlinien $z = c\zeta$ handelt es sich auf Grund ihrer projektiven Tangenteneigenschaft durchwegs um *W-Kurven*, also Bahnen gewisser eingliedriger Kollineationsgruppen, deren Fixpunkte von den Doppelpunkten der Projektivität $\mathfrak{P}$ und dem Fernpunkt der z-Achse dargestellt werden. Je nach der Art der Projektivität $\mathfrak{P}$ sind neuerlich drei Unterfälle zu unterscheiden.

$b^2 > 0$ (*Hyperbolische Projektivität*)

Die auftretenden *W-Kurven* sind reell-kollinear zu den unter 2. festgestellten allgemeinen Parabeln oder Hyperbeln, wobei der Exponent den Wert $(b \pm a)/2b$ hat, je nachdem ob der Doppelpunkt $x = +b$ oder $-b$ zum Ursprung gemacht wird[9]. Nach Einführung eines neuen Parameters t vermöge

$$\frac{v-b}{v+b} = t^b \text{ oder } v = b\,\frac{1+t^b}{1-t^b}$$

erhält man über (21_1) aus (3) die Meridiangleichungen der Flächen Φ in folgender Gestalt:

---

[9] Ganz allgemein bewirkt jede *projektive Transformation* einer beliebigen Begleitkorrespondenz $\mathfrak{P}$ stets eine *kollineare Umformung* der zugehörigen Affinschar $\bar{\mathfrak{f}}$.

$$x = \frac{1}{1-t^b}\{(1+t^b) - c^2 t^a [(a+b) + (b-a) t^b]\}$$
$$y = \frac{c}{1-t^b}\sqrt{t^a\{4b^2 t^b - c^2 t^a [(a+b) + (b-a) t^b]^2\}} \qquad (22)$$

Für die zugehörigen Leitflächen Ψ wäre lediglich das Vorzeichen von a zu verkehren; im übrigen gehen die beiden Flächensysteme aber auch durch Spiegelung an der Ebene $x = 0$ ineinander über. — Die Hüllfläche Δ der Ordnerkugeln ist ein *Torus* mit dem Meridianhalbmesser a und den Knotenpunkten $x = \pm b$, der nur für $a^2 > b^2$ reell ausfällt. Demgemäß haben die hier auftretenden Drehflächen ganz verschiedenartiges Gepräge, je nachdem $a^2 \gtrless b^2$ (reelle bzw. imaginäre Rückkehrkreise); für $a^2 = b^2$ liegt eine ausgeartete Projektivität vor, die auf ein zerfallendes System Φ führt, bestehend aus je einer Schar koachsialer Drehkegel und konzentrischer Kugeln. — Aus den Gleichungen (22) ist zu ersehen, daß für rationales a/b wiederum *algebraische Flächen* auftreten; nach Wahl einer passenden Längeneinheit dürfen in einem solchen Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit a und b als positivganz und teilerfremd vorausgesetzt werden; die Flächenordnung beträgt dann im allgemeinen

$$N = 2(a + b), \qquad (23)$$

kann sich jedoch für spezielle Werte der Konstante c erniedrigen.

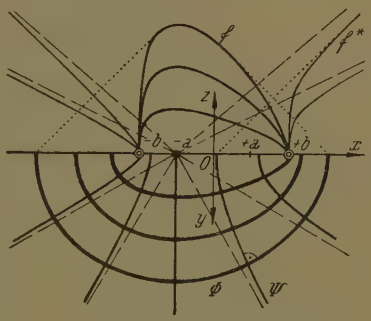

Abb. 6.

Der Sonderfall $a = 0$ ($b = 1$), der $\mathfrak{P}$ als *hyperbolische Involution* kennzeichnet, führt auf das klassische System *konfokaler Rotationsquadriken*, bestehend aus eiförmigen Ellipsoiden und zweischaligen Hyperboloiden, die gleichzeitig auch die Leitflächen abgeben[10]. — Die nächsteinfache Annahme $a = 1$, $b = 2$, die Grund- und Leitflächen 6. Ordnung liefert, ist in Abb. 6 dargestellt; um Überdeckungen zu vermeiden, wurde allerdings nur der aus Ovalen bestehende Teil der Φ-Schar wiedergegeben; der fehlende Teil liegt zu der eingetragenen Ψ-Schar spiegelbildlich bezüglich der Ebene $x = 0$.

$b^2 = 0$ (*Parabolische Projektivität*)

Hier lautet die aus (3) und (21_2) fließende Darstellung der Meridiane der Flächenschar Φ

[10] Für eine *involutorische Begleitkorrespondenz* ($\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1}$) fallen Bett- und Leitschar immer zusammen.

$$x = v - c^2\,(v+a)\,e^{-2a/v} \tag{24}$$
$$y = c\,e^{-a/v}\sqrt{v^2 - c^2\,(v+a)^2\,e^{-2a/v}}.$$

Die zyklographischen Urbilder dieser transzendenten Linien sind kollinear verformte *Exponentialkurven.*

$$b^2 = -b'^2 < 0 \quad (\textit{Elliptische Projektivität})$$

Nach Einführung des neuen Parameters $\tau = \operatorname{arctg}(v/b')$ erhält man aus (3) und (21_3) die Meridiangleichungen der Flächen Φ in der Form

$$x = b'\,\operatorname{tg}\tau - c^2\,e^{2p\tau}\,(a + b'\,\operatorname{tg}\tau) \text{ mit } p = a/b' \tag{25}$$
$$y = c\,e^{p\tau}\sqrt{b'^2\sec^2\tau - c^2\,e^{2p\tau}\,(a + b'\,\operatorname{tg}\tau)^2}.$$

Die zyklographischen Urbilder dieser Kurven sind im allgemeinen kollinear transformierte *logarithmische Spiralen*

Eine Ausnahmsstellung kommt der Annahme $a = 0$ zu, die die Korrespondenz $\mathfrak{P}$ als *elliptische Involution* kennzeichnet und wieder ein System *konfokaler Rotationsquadriken* liefert, diesmal jedoch aus abgeplatteten Ellipsoiden und einschaligen Hyperboloiden bestehend.

6. Übergang zu Parallelflächen.

Sei Φ eine beliebige Drehfläche und Ψ eine zugehörige, durch die Clairaut-Konstante c gekennzeichnete Leitfläche. Es soll die Veränderung untersucht werden, die die Leitfläche erfährt, wenn von der Grundfläche Φ zu der *Parallelfläche* $\bar{\Phi}$ im Abstand d übergegangen wird. Diese Veränderung ist am durchsichtigsten wieder im zyklographischen Urbild zu verfolgen.

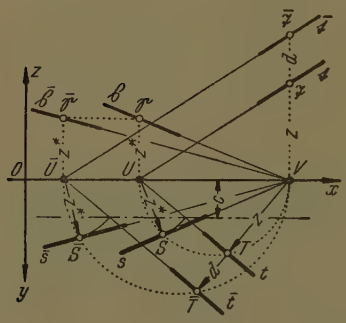

Abb. 7.

Gehen wir also aus von einem (orientierten) Meridianelement (T, t) der Grundfläche Φ und dem zugeordneten, etwa gemäß Abb. 3 konstruierten Leitelement (S, s). Die zugehörigen Normalenstrecken z, z^* — gleichzeitig die Koten der zyklographischen Urbildelemente $(\mathfrak{T}, \mathfrak{t})$ und $(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ — sind laut (7) durch die Beziehung

$$zz^* = c\,(v - u) \tag{26}$$

verknüpft. Wird nun beim Übergang zur Parallelfläche $\bar{\Phi}$ das Element (T, t) in Normalenrichtung um den festen Betrag d nach $(\bar{S}, \bar{t})$ verschoben, so bleibt der Normalenfußpunkt V fest, während der Tangentenfußpunkt U um das Stück

$$u - \bar{u} = \frac{d}{z}(v - u) = \frac{d}{c} z^* \tag{27}$$

nach $\bar{U}$ rückt; das Bildelement ($\mathfrak{T}$, t) erfährt eine *Verschiebung* $\mathfrak{D}$ in z-Richtung um die Abstandsstrecke d (Abb. 7). Wird die Clairaut-Konstante c beibehalten, so bleibt die Normalenstrecke z^* des Leitelements unverändert, was am einfachsten unmittelbar aus der Konstruktion zu erkennen ist. Der Punkt $\mathfrak{S}$ erfährt mithin eine Verschiebung in x-Richtung nach $\bar{\mathfrak{S}}$, und zwar um einen Betrag $\bar{u} - u$, der zufolge (27) seiner Kote z^* proportional ist. Die Transformation $\mathfrak{S} \to \bar{\mathfrak{S}}$ ist damit als *affine Scherung* längs der x-Achse zu erkennen; im Einklang damit bleibt der Tangentenfußpunkt V fest. Die auftretende Scherung ist im übrigen nichts anderes als die durch die Korrelation $\mathfrak{B}$ aus Abschn. IV transformierte Schiebung $\mathfrak{D}$.

Zusammenfassend gilt demnach: *Der Übergang von einer Drehfläche zu einer Parallelfläche im Abstand d bewirkt einerseits eine achsennormale Verschiebung* ($\bar{v} = v$, $\bar{z} = z + d$) *der zyklographischen Urbildkurve des Meridians, andererseits eine achsenparallele Scherung* ($\bar{u} = u - \lambda z^*$, $\bar{z}^* = z^*$) *der Urbildkurve des Meridians der zur Clairaut-Konstante* $c = d/\lambda$ *gehörigen Leitfläche.*

Als erste Anwendung mag ein *Torus* $\bar{\Phi}$ betrachtet werden, aufgefaßt als Parallelfläche einer *Kreislinie* Φ. Die zu dieser ausgearteten Grundfläche gehörigen Leitflächen Ψ sind die am Schluß des vorigen Abschnittes erwähnten *konfokalen Drehhyperboloide*, die die Kreislinie als gemeinsamen Fokalkegelschnitt besitzen. Die Urbildkurve $\mathfrak{f}$ des auf einen Nullkreis zusammengeschrumpften Meridians von Φ ist eine *gleichseitige Hyperbel* mit x als Nebenachse, aus der die Bildkurve $\bar{\mathfrak{f}}$ des Meridiankreises von $\bar{\Phi}$ durch Verschiebung in z-Richtung hervorgeht. Die Meridiane der den Torus $\bar{\Phi}$ enthaltenden *Bettschar* ergeben sich durch zyklographische Abbildung der $\bar{\mathfrak{f}}$ enthaltenden Affinschar von ungleichseitigen Hyperbeln und sind demnach *Toroiden*, also Parallelkurven von Ellipsen, was auch im Einklang mit der Tatsache steht, daß die Meridiane der Bettflächen zu den Umrißkurven der Ausgangsfläche ähnlich sind (Abschn. II). Die Urbildkurve der Meridianhyperbel eines Leithyperboloids Ψ von Φ ist gleichfalls eine zu x symmetrische *Hyperbel*; diese wird durch affine Scherung in eine zu x schief-symmetrische Hyperbel transformiert, deren zyklographisches Bild ein gewisser *Hyperzykel* ist (Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse). *Die Tangenten einer Torusgeodätischen berühren mithin eine koachsiale Leitfläche, deren Meridian ein zur Achse symmetrischer und durch einen Mittelpunkt ausgezeichneter Hyperzykel ist.*

Als zweites Beispiel betrachten wir jene Drehfläche 6. Ordnung $\bar{\Phi}$, die durch Rotation einer regulären *Astroide* um eine zwei Scheitelpunkte tragende Symmetrieachse x entsteht. Sie kann als Parallelfläche jener am Ende von Abschn. II, 2) erwähnten Drehfläche Φ angesehen werden, die durch Drehung des *Maltakreuzes* um die Selbstberührungstangente erzeugt wird. Das zyklographische Urbild des Maltakreuzes ist eine gewöhnliche *Parabel* $\mathfrak{f}$ mit der Scheiteltangente

x; das Urbild der Astroide ist demnach eine zu $\mathfrak{f}$ kongruente Parabel $\bar{\mathfrak{f}}$ mit z-paralleler Achse. Durch zyklographische Abbildung der $\bar{\mathfrak{f}}$ enthaltenden Affinschar von Parabeln erhält man als Meridiane der $\bar{\Phi}$ enthaltenden *Bertschar* lauter *Parallelkurven von Astroiden* (Evolventen von Astroiden oder „schiefe Astroiden"). Das zyklographische Urbild des Meridians einer Leitfläche Ψ von Φ ist zufolge Abschn. II, 2) eine *gleichseitige Hyperbel* $\mathfrak{f}^*$ mit x als Asymptote. Die genannte, x punktweise festlassende affine Scherung verwandelt $\mathfrak{f}^*$ in eine ungleichseitige *Hyperbel* $\bar{\mathfrak{f}}^*$, deren zyklographisches Bild als Meridian der Leitfläche $\bar{\Psi}$ von $\bar{\Phi}$ wieder einen zur Asymptote x symmetrischen und mit einem Zentrum behafteten *Hyperzykel* liefert.

Beiträge zur numerischen Integration.

I. Der Fehler beim Blaess'schen Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Von

E. Bukovics, Wien.

(Eingelangt am 3. April 1953.)

1. Einleitung.

Zur direkten angenäherten Lösung von Anfangswertproblemen bei Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung stehen die folgenden drei Verfahren zur Verfügung: Das Differenzenschemaverfahren [1], das *Runge-Kutta*-Verfahren [2] und das Verfahren von *Blaess* [3]. Die beiden erstgenannten Verfahren sind auch in [4] zusammenfassend dargestellt. In diesem Buch findet man auch eine Würdigung dieser und Angaben über ihren Anwendungsbereich, sowie ausführliche Literaturangaben. Für das Differenzenschemaverfahren sind von *R. v. Mises*, *G. Schulz*, *L. Collatz* und *R. Zurmühl* Formeln entwickelt worden, die eine fortlaufende Abschätzung des Fehlers ermöglichen[1]. Für das *Runge-Kutta*-Verfahren hingegen hat *L. Bieberbach* [5] für Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme von solchen, sowie für Differentialgleichungen höherer Ordnung, die auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden, Fehlerformeln angegeben, die jedoch nur die Fehlerabschätzung für einen Schritt gestatten. Für das Verfahren von *Blaess* existieren bisher überhaupt noch keine Abschätzungen für den dabei auftretenden Fehler.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung brauchbare fortlaufende Fehlerabschätzung für dieses Verfahren entwickelt werden. Es ergeben sich dabei zunächst Formeln, die eine rekursive Abschätzung ermöglichen. Aus diesen kann man Formeln für eine independente Fehlerabschätzung — ähnlich wie

[1] Nähere Angaben finden sich in [4], Seite 59, Fußnote.

beim Differenzenschemaverfahren — durch Lösung eines Systems von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten oder aber auch mit Hilfe von Formeln der Matrizenrechnung gewinnen. Die hier angewendete Methode läßt sich auch zur Ermittlung einer fortlaufenden Fehlerabschätzung beim *Runge-Kutta*-Verfahren verwenden. Ich hoffe, darüber in einer weiteren Arbeit berichten zu können.

2. Voraussetzungen.

Es sei eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

vorgelegt. Es soll nach dem Verfahren von *Blaess* diejenige Lösung angenähert bestimmt werden, die den Anfangsbedingungen

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1) \tag{2}$$

genügt. Von dieser Lösung soll vorausgesetzt werden, daß sie durch eine Potenzreihe darstellbar ist.

Zur Fehlerabschätzung nach dem ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz sind folgende Voraussetzungen notwendig.:

Voraussetzungen: Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f seien in einem konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ des $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$-Raumes, der die Lösungsfunktionen und alle in Betracht kommenden Näherungen enthält, beschränkt. Dann gilt in $\mathfrak{B}$ für f eine Lipschitzbedingung in der Form:[2]

$$\left|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f(x, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})\right| \leqq K \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| y^{(\nu)} - Y^{(\nu)} \right| \tag{3}$$

mit

$$K = \text{Max} \cdot \left| f_{y^{(\nu)}} \right| \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1) \tag{3a}$$

genügen. Weiters sollen in $\mathfrak{B}$ die Abschätzungen

$$\left| f_{y^{(n-1)}} \right| \leqq M', \quad \left| \frac{df}{dx} \right| \leqq M_1, \quad \left| \frac{d^3 f}{dx^3} \right| \leqq M_3 \tag{4}$$

gelten.

Für die Abschätzung nach dem von mir in [3] erweiterten Ansatz sind noch zusätzlich folgende Voraussetzungen zu machen:

Zusatzvoraussetzungen: Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f_{y^{(n-1)}}$ seien in $\mathfrak{B}$ beschränkt. Dann gilt in $\mathfrak{B}$ für $f_{y^{(n-1)}}$ eine Lipschitzbedingung in der Form[2]:

[2] Es ist hier zweckmäßig, mit der Lipschitzbedingung in dieser Form zu arbeiten, um die Schlußformeln übersichtlich zu erhalten.

$$\left| f_{y^{(n-1)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f_{y^{(n-1)}}(x, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}) \right| \leqq$$
$$\leqq L \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| y^{(\nu)} - Y^{(\nu)} \right| \qquad (3^*)$$

mit

$$L = \text{Max.} \left| f_{y^{(\nu)}\, y^{(n-1)}} \right| \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1) \qquad (3a^*)$$

Es seien folgende Ungleichungen in $\mathfrak{B}$ erfüllt:

$$|f| \leqq M, \quad \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| \leqq M_2. \qquad (4^*)$$

3. Das Blaess'sche Schema[3].

Das *Blaess*'sche Verfahren, das in [3] für Differentialgleichungen n-ter Ordnung entwickelt ist, beruht — ähnlich wie das *Runge-Kutta*-Verfahren — auf dem Prinzip, daß von den Anfangswerten ausgehend, schrittweise für äquidistante Argumente Näherungswerte für die Lösungsfunktion und ihre Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten berechnet werden. Zweckmäßiger ist es, statt dieser die daraus gebildeten Funktionen

$$v^j = y^{(j)} \frac{h^j}{j!} \qquad j = 0, 1, \ldots, (n-1) \qquad (5)$$

zu verwenden. Um das Verfahren, das man übrigens für jeden Schritt zweckmäßig in ein sogenanntes *Blaess*'sches Schema anordnet, nochmals kurz zu erläutern, genügt es zu zeigen, wie man von den nach m Schritten erhaltenen Werten v^j_m („Verbesserte Werte") zu den nächstfolgenden Werten v^j_{m+1} kommt. Dazu wird das Intervall in k Teilintervalle (k bleibt ein für alle Male fest) unterteilt. Die Länge der Teilintervalle („Schrittlänge") sei h. Für die Zwischenargumente werden nun mit Hilfe der bei $y^{(n)}$ abgebrochenen Taylorentwicklungen „Grobwerte" $\tilde{v}^j_{m,i}$ nach der Formel:

$$\tilde{v}^j_{m,i} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} \tilde{v}^\sigma_{m,i-1} + \binom{n}{j} \tilde{f}_{m,i-1} \frac{h^n}{n!} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{matrix} \qquad (6)$$

berechnet, wobei

$$\left.\begin{matrix} x_{m,i-1} = x_m + (i-1)\, h & \tilde{v}^j_{m,0} = v^j_m \\ x_{m,0} = x_m = x_0 + k \cdot h & \\ \tilde{f}_{m,i} = f(x_{m,i}, \tilde{y}_{m,i}, \tilde{y}'_{m,i}, \ldots, \tilde{y}^{(n-1)}_{m,i}) & \end{matrix}\right\} \qquad (7)$$

[3] Für diesen Abschnitt vergleiche man die Entwicklungen in [3], aus denen die wichtigsten Formeln in geänderter Form übernommen sind.

zu setzen ist. Die Grobwerte (6) werden nun durch Anbringen von Korrekturen entweder nach dem ursprünglich von *Blaess* für Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelten und von mir auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung verallgemeinerten Ansatz

$$V_m^j = \sum_{i=0}^{k} A_i^j \, \tilde{f}_{m,i} \, \frac{h^n}{n!} \tag{8}$$

oder — zur Erzielung einer größeren Genauigkeit — unter Heranziehung der Funktionswerte von $f_{y^{(n-1)}}$ für das Argument x_m nach der Formel

$$V_m^{j*} = \sum_{i=0}^{k} [A_i^j + B_i^j f_{m,\, y^{(n-1)}} h] \, \tilde{f}_{m,i} \, \frac{h^n}{n!} \tag{8*}$$

mit

$$f_{m,\, y^{(n-1)}} = f_{y^{(n-1)}}(x_m, y_m, \ldots, y_m^{(n-1)}) \tag{9}$$

verbessert. Der Ansatz (8*) soll im folgenden kurz als der „erweiterte *Blaess*'sche Ansatz" bezeichnet werden.

Man kommt zu den „verbesserten Werten"

$$v_{m+1}^j = \tilde{v}_{m,\,k}^j + V_m^j, \tag{10}$$

bzw.

$$v_{m+1}^{j*} = \tilde{v}_{m,\,k}^j + V_m^{j*}. \tag{10*}$$

Für die späteren Entwicklungen ist es notwendig, v_{m+1}^j, bzw. v_{m+1}^{j*} durch v_m^j, bzw. v_m^{j*} auszudrücken. Man erhält durch rekursives Einsetzen von (6) unter Benützung von (8) in (10):

$$v_{m+1}^j = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \, v_m^\sigma + \sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^j \, \tilde{f}_{m,i} \, \frac{h^n}{n!}, \tag{11}$$

bzw. aus (10*):

$$v_{m+1}^{j*} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \, v_m^{\sigma*} + \sum_{i=0}^{k} [\overline{A}_i^j + B_i^j f_{m,\, y^{(n-1)}} h] \, \tilde{f}_{m,i} \, \frac{h^n}{n!}, \tag{11*}$$

wobei die $\overline{A}_i^j$ mit den A_i^j gemäß:

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_i^j &= A_i^j + (k-i)^{n-j} - (k-i-1)^{n-j} \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \overline{A}_k^j &= A_k^j \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

zusammenhängen.

Die Bestimmung der A_i^j und B_i^j, bzw. $\overline{A}_i^j$ und B_i^j erfolgt so, daß für den ersten Schritt die Taylorentwicklungen von v_1^j, bzw. v_1^{j*} bezüglich der Anfangswerte v_0^j möglichst genau mit den Taylorentwicklungen der wahren Werte übereinstimmen. In [3] habe ich gezeigt, daß mit Hilfe des ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatzes eine Übereinstimmung bis

zu Gliedern $(n+1)$-ter Ordnung in h erreicht werden kann, während mit Hilfe des erweiterten Ansatzes auch noch die Glieder $(n+2)$-ter Ordnung erfaßt werden. Dort sind auch die Gleichungen, denen die A_i^j und B_i^j genügen müssen, angegeben[4]. Wesentlich einfacher sind, wie sich als Nebenresultat bei den folgenden Entwicklungen ergeben wird, die Gleichungen für die $\bar{A}_i^j$ und B_i^j, so daß es sich empfiehlt, zuerst diese zu bestimmen und davon gemäß (12) zu den A_i^j und B_i^j überzugehen.

4. Abkürzungen und vorbereitende Formeln.

Für das Folgende sollen nun noch einige Formeln bereitgestellt werden.

Zunächst setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} D^k f &= [\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \ldots + y^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-2)}} + f \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}]^k f, \\ D_1^2 f &= D^2 f + f_y y'' + \ldots + f_{y^{(n-2)}} f. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dann gilt für die Taylorentwicklung der wahren Werte — diese sollen durch einen darübergesetzten Querstrich gekennzeichnet werden — für das Argument x_{m+1} bezüglich der Stelle x_m die Formel:

$$\bar{v}_{m+1}^j = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \bar{v}_m^\sigma + A, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{14}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A = {} & \binom{n}{j} k^{n-j} \bar{f}_m \frac{h^n}{n!} + \binom{n+1}{j} k^{n-j+1} D\bar{f}_m \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \\ & + \binom{n+2}{j} k^{n-j+2} [D_1^2 \bar{f}_m + \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} D\bar{f}_m] \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} + \\ & + \binom{n+3}{j} k^{n-j+3} f'''_{k\vartheta j} \frac{h^{n+3}}{(n+3)!} \end{aligned}\right\}. \tag{14a}$$

wobei

$$\bar{f}_m = f(x_m, \bar{y}_m, \bar{y}_m', \ldots, \bar{y}_m^{(n-1)})$$

gesetzt wurde und $\bar{f}_{m,y^{(n-1)}}$, $D\bar{f}_m$, $D_1^2 \bar{f}_m$ ähnliche Bedeutung haben, während $f'''_{k\vartheta j}$ den Funktionswert der dritten Ableitung an einer Zwischenstelle bezeichnet.

Durch einen darübergesetzten Haken sollen die Grobwerte bezeichnet werden, die sich nach (6) ergeben würden, wenn man anstatt von den

[4] [3], Formeln (25a, b).

verbesserten Werten v_m^j von den wahren Werten $\bar{v}_m^j$ ausgehen würde. Es gilt also:

$$\hat{v}_{m,i}^j = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} \hat{v}_{m,i-1}^{\sigma} + \binom{n}{j} \hat{f}_{m,i-1} \frac{h^n}{n!} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{matrix} \tag{15}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{v}_{m,0}^j &= \bar{v}_m^j \\ \hat{f}_{m,i} &= f(x_m, \hat{y}_{m,i}, \hat{y}'_{m,i}, \ldots, \hat{y}^{(n-1)}_{m,i}) \end{aligned} \tag{16}$$

Schließlich werden noch die Taylorentwicklungen der $\hat{f}_{m,i}$ bezüglich $\hat{f}_{m,0} = \bar{f}_m$ benötigt werden. Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}_{m,i} = \bar{f}_m + i\, D\bar{f}_m\, h + [i^2 D_1^2 \bar{f}_m + i(i-1) \bar{f}_{m,y^{(n-1)}} D\bar{f}_m] \frac{h^2}{2!} + \\ + i^3 f'''_{m\vartheta i} \frac{h^3}{3!} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

oder

$$\hat{f}_{m,i} = \bar{f}_m + i\, D\bar{f}_m\, h + i^2 f''_{m\vartheta i} \frac{h^2}{2!}, \tag{17a}$$

wobei $f_m''{}_{\vartheta i}$, bzw. $f'''_{m\vartheta i}$ Werte der zweiten, bzw. dritten Ableitung für Zwischenstellen bezeichnen.

Die Aufgabe der folgenden Abschnitte wird es nun sein, für die Fehler

$$\eta_{m+1}^j = v_{m+1}^j - \bar{v}_{m+1}^j \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{18}$$

des ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatzes, bzw. für die Fehler

$$\eta_{m+1}^{j*} = v_{m+1}^{j*} - \bar{v}_{m+1}^j \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{18*}$$

des erweiterten Ansatzes rekursive, bzw. independente Abschätzungen zu bekommen. Im Laufe der Rechnung wird gelegentlich auf die Fehler von y und den zugehörigen Ableitungen selbst

$$\begin{aligned} \xi_{m+1}^j &= y_{m+1}^{(j)} - \bar{y}_{m+1}^{(j)}, \\ \xi_{m+1}^{j*} &= y_{m+1}^{(j)*} - \bar{y}_{m+1}^{(j)} \end{aligned} \tag{19}$$

zurückgegriffen werden. Weiters werden die Unterschiede

$$\varepsilon_{m,i}^j = \tilde{y}_{m,i}^{(j)} - \hat{y}_{m,i}^{(j)} \tag{20}$$

zwischen den Grobwerten (6) und (15) benötigt werden.

5. Der Fehler beim ursprünglichen Blaess'schen Ansatz.

Zu einer Rekursionsformel für den Fehler beim ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz gelangt man, wenn man (11) und (14) in (18) einsetzt:

$$\eta_{m+1}^{j} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} v_m^{\sigma} + \sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} \tilde{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} - [\sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \bar{v}_m^{\sigma} + A],$$

woraus man durch Zusammenfassung und Erweiterung

$$\begin{aligned}\eta_{m+1}^{j} &= \{\sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} (v_m^{\sigma} - \bar{v}_m^{\sigma})\} + \{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} (\tilde{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) \frac{h^n}{n!}\} + \\ &+ \{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} \hat{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} - A\} = \\ &= I + II + III\end{aligned} \tag{21}$$

erhält. Nun müssen I, II und III abgeschätzt werden:

a) *Abschätzung von I:*

$$|I| \leqq \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} |\eta_m^{\sigma}|. \tag{22}$$

b) *Abschätzung von II:*

Zunächst folgt aus (3), (7), (16) und (20):

$$|II| \leqq K \frac{h^n}{n!} \sum_{i=0}^{k} [|\overline{A}_i^{j}| \sum_{\nu=0}^{n-1} |\varepsilon_{m,i}^{\nu}|]. \tag{23}$$

Hier müssen die $\varepsilon_{m,i}^{\nu}$ durch die η_m^{σ} ausgedrückt werden. Aus (6) und (15) ergibt sich:

$$\tilde{v}_{m,i}^{\nu} - \hat{v}_{m,i}^{\nu} = \sum_{\sigma=\nu}^{n-1} \binom{\sigma}{\nu} (\tilde{v}_{m,i-1}^{\sigma} - \hat{v}_{m,i-1}^{\sigma}) + \binom{n}{\nu} (\tilde{f}_{m,i-1} - \hat{f}_{m,i-1}) \frac{h^n}{n!}$$

und daraus, wenn man die $\tilde{v}_{m,i}^{\nu}$ und $\hat{v}_{m,i}^{\nu}$ durch die $\tilde{y}_{m,i}^{(\nu)}$ und $\hat{y}_{m,i}^{(\nu)}$ gemäß (5) ersetzt und in (20) einträgt:

$$\varepsilon_{m,i}^{\nu} = \sum_{\sigma=\nu}^{n-1} \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \frac{h^{\sigma-\nu}}{(\sigma-\nu)!} + [\tilde{f}_{m,i-1} - \hat{f}_{m,i-1}] \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!}$$

Nun kann man die Voraussetzung (3) anwenden und erhält die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_{m,i}^{\nu}| &\leqq \sum_{\sigma=\nu}^{n-1} |\varepsilon_{m,i-1}^{\sigma}| \frac{h^{\sigma-\nu}}{(\sigma-\nu)!} + K \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \sum_{\sigma=0}^{n-1} |\varepsilon_{m,i-1}^{\sigma}|, \\ \varepsilon_{m,0}^{\sigma} &= \xi_m^0 \qquad \begin{matrix} \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i = 1, 2, \ldots, k \end{matrix} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Damit hat man im Prinzip die Möglichkeit, bei gegebener Schrittweite h und gegebener Lipschitzkonstanten K Abschätzungen für die $|\varepsilon_{m,i}^{\nu}|$ zu finden und in (23) einzutragen. Dieser Vorgang wäre aber für die praktische Handhabung viel zu umständlich. Durch die folgende Überlegung

wird es möglich, zu einer praktisch brauchbaren Formel für die Abschätzung der in (23) benötigten $\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i}^{\nu} \right|$ zu gelangen: Aus (24) folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i}^{\nu} \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\sum_{\sigma=\nu}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| \frac{h^{\sigma-\nu}}{(\sigma-\nu)!} + K \frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| \right]. \tag{25}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung lautet ausführlich:

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| + h \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| + \ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{\sigma=n-2}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| +$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\sigma=n-1}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| + K \cdot \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| \left(h + \frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\right).$$

Die Ungleichung (25) wird um so mehr erfüllt sein, wenn man auf der rechten Seite den Ausdruck

$$h \sum_{\sigma=0}^{0} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| + \ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{\sigma=0}^{n-3} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\sigma=0}^{n-2} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right|$$

addiert. Dann wird aus (25) die Ungleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i}^{\nu} \right| \leqq \alpha \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i-1}^{\sigma} \right| \tag{26}$$

mit

$$\alpha = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{h^{\tau}}{\tau!} + K \sum_{\tau=1}^{n} \frac{h^{\tau}}{\tau!} \tag{27}$$

und

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,0}^{\sigma} \right| = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \xi_m^{\sigma} \right|. \tag{28}$$

Für manche Zwecke wird es genügen, α durch den größeren Wert

$$\bar{\alpha} = e^h + K(e^h - 1) \tag{29}$$

zu ersetzen. Dieser Wert wird um so genauer mit α übereinstimmen, je höher die Ordnung der Differentialgleichung ist, je komplizierter also die Berechnung von α selbst wäre.

Aus der Rekursionsformel (26) gewinnt man die direkte Abschätzung:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \varepsilon_{m,i}^{\nu} \right| \leqq \alpha^i \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \xi_m^{\sigma} \right|, \tag{30}$$

die nun bequem zur Abschätzung von *II* verwendet werden kann. Einsetzen von (30) in (23) gibt:

$$|II| \leqq K \cdot \frac{h^n}{n!} \sum_{i=0}^{k} |\bar{A}_i^j| \, \alpha^i \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_m^\sigma|$$

oder nach Ersetzen der ξ_m^σ durch die η_m^σ:

$$|II| \leqq K \cdot \beta_j \cdot \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sigma!}{n!} \, h^{n-\sigma} \, |\eta_m^\sigma| , \tag{31}$$

wobei

$$\beta_j = \sum_{i=0}^{k} |\bar{A}_i^j| \, \alpha^i \tag{32}$$

gesetzt wurde.

c) *Abschätzung von III*:

Einsetzen von (14) und (17) in (21) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} III = \{ &\sum_{i=0}^{k} \bar{A}_i^j \frac{h^n}{n!} [\bar{f}_m + i\, D\bar{f}m\, h + i^2 D_1^2 \bar{f}_m \frac{h^2}{2!}] - \binom{n}{j} k^{n-j} \bar{f}_m \frac{h^n}{n!} - \\ &- \binom{n+1}{j} k^{n-j+1} D\bar{f}m \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} - \binom{n+2}{j} k^{n-j+2} D_1^2 \bar{f}_m \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} \} + \\ + \{ &\sum_{i=0}^{k} \bar{A}_i^j \frac{h^n}{n!} [i\,(i-1)\, \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} D\bar{f}m \frac{h^2}{2!} + i^3 f'''_{m\vartheta i} \frac{h^3}{3!}] - \\ &- \binom{n+2}{j} k^{n-j+2} \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} D\bar{f}m \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} - \binom{n+3}{j} k^{n-j+3} f'''_{k\vartheta j} \frac{h^{n+3}}{(n+3)!} \} \\ = IV &+ V. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Nachdem in Abschnitt 3 erwähnten Prinzip, das dem *Blaess*'schen Verfahren zugrunde liegt, sind die Konstanten $\bar{A}_i^j$ so zu bestimmen, daß

$$IV \equiv 0$$

gilt. Diese Forderung führt zu den n Gleichungssystemen von je drei Gleichungen[5]:

$$\boxed{\begin{aligned} \binom{n+\varphi}{\varphi} \sum_{i=0}^{k} i^\varphi \bar{A}_i^j &= \binom{n+\varphi}{\varphi} k^{n-j+\varphi}, \\ j &= 0, 1, \ldots, n-1 \\ \varphi &= 0, 1, 2 \end{aligned}} \tag{34}$$

[5] Die Systeme (34) sind gleichwertig mit den wesentlich komplizierteren Gleichungen 1, 3 und 4 in (25a, b) in [3], denen die $A_i j$ genügen müssen. Daß eine weitere Abgleichung der Taylorentwicklung nicht möglich ist, wurde in [3] gezeigt. Die Formeln (3a), (26b), (27b) in [3] geben die günstigsten Werte für die $A_i j$ für $n = 2, 3, 4$. In (27b) ist ein Druckfehler stehen geblieben. Es ist bei V_0 4480 durch 4080 zu ersetzen.

Genügen die $\overline{A}_i^j$ diesen Gleichungen, dann gilt für *III* unter Verwendung der Voraussetzungen (4) die Abschätzung:

$$|III| \leqq J_j, \tag{35}$$

wobei

$$\begin{aligned} J_j = M' M_1 h^{n+2} \Big| \frac{1}{2!\,n!} \sum_{i=0}^{k} i\,(i-1)\,\overline{A}_i^j - \frac{k^{n-j+2}}{j!\,(n-j+2)!} \Big| + \\ + M_3 h^{n+3} \Big[\frac{1}{3!\,n!} \sum_{i=0}^{k} i^3 \Big| \overline{A}_i^j \Big| + \frac{k^{n-j+3}}{j!\,(n-j+3)!} \Big] \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{36}$$

gesetzt wurde. J_j kann man auch als „Quadraturfehler" bezeichnen.

d) *Gesamtabschätzung*:

Durch Einsetzen von (22), (31) und (35) in (21) ist nun die gesuchte Formel zur rekursiven Fehlerabschätzung für den ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz gewonnen:

$$\begin{aligned} |\eta_{m+1}^j| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu} |\eta_m^\nu| + J_j \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{37}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_{j\nu} = \binom{\nu}{j} k^{\nu-j} + \frac{\nu!}{n!} K \beta_j h^{n-\nu} \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta_j = \sum_{i=0}^{k} |\overline{A}_i^j|\, \alpha^i, \quad \alpha = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{h^\tau}{\tau!} + K \sum_{\tau=1}^{n} \frac{h^\tau}{\tau!} \end{aligned} \tag{38}$$

Für J_j sind die Ausdrücke (36) einzusetzen.

Um für Differentialgleichungen einer bestimmten Ordnung das *Blaess*'sche Verfahren durchführen zu können, hat man die Gleichungen (34) aufzustellen und diese, nachdem man sich für eine bestimmte Schrittzahl k entschieden hat, zu lösen. Die gefundenen Werte für die $\overline{A}_i^j$ sind dann in (36) und (38) einzusetzen. Die für Differentialgleichungen

zweiter, dritter und vierter Ordnung sich ergebenden Formeln sind in Abschnitt 9 explizit angegeben.

Die rekursiven Fehlerformeln enthalten dann nur noch die Abschätzungen für K, M', M_1 und M_3 des speziellen Anfangswertproblemes, sowie die Schrittweite h. Hält man h während aller Schritte fest und schätzt K, M', M_1 und M_3 für den ganzen in Betracht kommenden Bereich $\mathfrak{B}$ ab, dann sind die γ_{jv} und J_j Konstante und man hat zur Abschätzung des Fehlers ein System von n linearen Ungleichungen mit konstanten Koeffizienten, wobei

$$\eta_0^j = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{39}$$

zu setzen ist. Wie man unter diesen Voraussetzungen zu einer independenten Fehlerabschätzung gelangen kann, wird in Abschnitt 7 gezeigt werden.

In der Praxis wird es sich jedoch meist empfehlen, die Abschätzungen für K, M', M_1 und M_3 nur jeweils für Teilbereiche von $\mathfrak{B}$ vorzunehmen und eventuell auch die Schrittweite zu ändern. Dann ist man auf die rekursive Fehlerabschätzung angewiesen, die hier — im Gegensatz zum Differenzenschemaverfahren — verhältnismäßig einfach durchzuführen ist. Zur Erleichterung der Rechnung sind für die in (38) auftretenden Werte β_j Tabellen beigegeben, die für α zwischen 1.000 und 1.250 für Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung die β_j direkt abzulesen gestatten[6].

6. Der Fehler beim erweiterten Blaess'schen Ansatz.

Hier kann in ähnlicher Weise wie in Abschnitt 5 vorgegangen werden. Zu den Voraussetzungen von Abschnitt 1 treten nun noch die dort angeführten Zusatzvoraussetzungen hinzu.

Aus (11*), (14) und (18*) erhält man

$$\eta_{m+1}^{j\,*} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} v_m^{\sigma *} + \sum_{i=0}^{k} [\bar{A}_i^j + f_{m,\, y^{(n-1)}}\, B_i^j\, h] \frac{h^\pi}{n!} - \\ - [\sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \bar{v}_m^\sigma + A]$$

und daraus

[6] Bei der Benützung dieser Tabellen kann man sich auf lineare Interpolation beschränken.

$$\eta^{j*}_{m+1} = \{\sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} (v^{\sigma^*}_m - \bar{v}^{\sigma}_m)\} + \{\sum_{i=0}^{k} \bar{A}^j_i (\tilde{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) \frac{h^n}{n!}\} +$$

$$+ \{\sum_{i=0}^{k} B^j_i [f_{m,\, y^{(n-1)}} (\tilde{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) + \hat{f}_{m,i} (f_{m,y^{(n-1)}} - \bar{f}_{m,y^{(n-1)}}) \frac{h^{n+1}}{n!}\} +$$

$$+ \{\sum_{i=0}^{k} \bar{A}^j_i \hat{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} + \sum_{i=0}^{k} B^j_i \hat{f}_{m,\, y^{(n-1)}} \frac{h^{n+1}}{n!} - A\} =$$

$$= I^* + II^* + III^* + IV^*. \tag{40}$$

a) *Abschätzung von* I^*:

$$|\, I^* \,| \leqq \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} \,|\, \eta^{\sigma^*}_m \,|\,. \tag{41}$$

b) *Abschätzung von* II^*:

Aus (3), (7), (16) und (20) folgt analog zu (23):

$$|\, II^* \,| \leqq K \frac{h^n}{n!} \sum_{i=0}^{k} [\,|\, \bar{A}^j_i \,|\, \sum_{\nu=0}^{n-1} |\, \varepsilon^{\nu}_{m,i} \,|\,]$$

und es gelten die Formeln (26), (27) unverändert, während (30) durch

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} |\, \varepsilon^{\nu}_{m,i} \,| \leqq \alpha^i \sum_{\sigma=0}^{n-1} |\, \xi^{\sigma^*}_m \,| \tag{42}$$

zu ersetzen ist. Daraus ergibt sich:

$$|\, II^* \,| \leqq K \,.\, \beta_j \,.\, \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sigma!}{n!} h^{n-\sigma} \,|\, \eta^{\sigma^*}_m \,| \tag{43}$$

in Analogie zu (31), wobei β_j die durch (32) erklärte Bedeutung hat.

c) *Abschätzung von* III^*:

Zunächst gilt unter Benützung der Voraussetzungen (4) und (4*):

$$|\, III^* \,| \leqq \sum_{i=0}^{k} |\, B^j_i \,| [M' |\, \tilde{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i} \,| + M \,|\, f_{m,\, y^{(n-1)}} - \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} \,|] \frac{h^{n+1}}{n!},$$

woraus man nach Voraussetzung (3) und (3*) unter Berücksichtigung von (42) folgern kann:

$$|\, III^* \,| \leqq (K M' \delta_j + L M \sum_{i=0}^{k} |\, B^j_i \,|\,)\, h \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sigma!}{n!} h^{n-\sigma} \,|\, \eta^{\sigma^*}_m \,| \tag{44}$$

mit

$$\delta_j = \sum_{i=0}^{k} |\, B^j_i \,| \, \alpha^i. \tag{45}$$

d) *Abschätzung von* IV*:

Aus (40) folgt unter Benützung von (14), (17) und (33):

$$IV^* = \{IV\} + \{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}^j_i \frac{h^n}{n!}\, i\,(i-1)\, \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}}\, D\bar{f}m \frac{h^2}{2!} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} B^j_i\, \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} \frac{h^{n+1}}{n!} (\bar{f}_m + i\, D\bar{f}_m\, h) - \binom{n+2}{j} k^{n-j+2}\, \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}}\, D\bar{f}_m$$

$$\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}\} + \{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}^j_i \frac{h^n}{n!}\, i^3\, f'''_{m\vartheta i} \frac{h^3}{3!} + \sum_{i=0}^{k} B^j_i\, \bar{f}_{m,\, y^{(n-1)}} \frac{h^{n+1}}{n!}\, i^2\, f''_{m\vartheta i'} \frac{h^2}{2!} -$$

$$- \binom{n+3}{j} k^{n-j+3}\, f'''_{k\vartheta j} \frac{h^{n+3}}{(n+3)!}\} =$$

$$= IV + V^* + VI^*.$$

Durch den erweiterten Ansatz ist es nun möglich, zusätzlich zu $IV \equiv 0$, was durch die Gleichungen (34) gewährleistet ist, noch

$$V^* \equiv 0$$

zu fordern. Das führt auf die n Gleichungssysteme von je zwei Gleichungen für die B^j_i:[7]

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k} B^j_i = 0, \\ &\sum_{i=0}^{k} i\,(i-1)\, \overline{A}^j_i + 2 \sum_{i=0}^{k} i\, B^j_i = \frac{n!\, 2!}{j!\,(n-j+2)!}\, k^{n-j+2} \end{aligned}} \tag{46}$$

Genügen die $\overline{A}^j_i$ und B^j_i den Gleichungen (34) und (46), dann gilt für IV^* unter Verwendung der Voraussetzungen (4) und (4*) die Abschätzung:

$$|\, IV^* \,| \leqq J_j^* \tag{47}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} J_j^* = M_3\, h^{n+3} [\frac{1}{3!\, n!} \sum_{i=0}^{k} i^3\, |\, \overline{A}^j_i \,| + \frac{k^{n-j+3}}{j!\,(n-j+3)!}] + \\ + M'\, M_2\, h^{n+3} \frac{1}{2!\, n!} \sum_{i=0}^{k} i^2\, |\, B^j_i \,|\,. \end{aligned}} \tag{48}$$

e) *Gesamtabschätzung*:

Die Rekursionsformel für den Fehler beim erweiterten *Blaess*'schen Ansatz ergibt sich nun durch Einsetzen von (41), (43), (44) und (47) in (40):

[7] Diese Formeln treten an Stelle der Gleichungen 2 und 5 von (25a, b) in [3].

$$| \eta^{j}_{m+1} \overset{*}{} | \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu}^{*} \, | \eta^{\nu}_{m} \overset{*}{} | + J_j^{*}. \tag{49}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$\gamma^{*}_{j\nu} = \binom{\nu}{j} k^{\nu-j} + \frac{\nu!}{n!} [K \beta_j + h (K M' \delta_j + LM \sum_{i=0}^{k} | B^{j}_{i} |] h^{n-\nu}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{50}$$

$$\beta_j = \sum_{i=0}^{k} | \overline{A}^{j}_{i} | \alpha^{i} \qquad \alpha = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{h^{\tau}}{\tau!} + K \sum_{\tau=0}^{n} \frac{h^{\tau}}{\tau!}$$

$$\delta_j = \sum_{i=0}^{k} | B^{j}_{i} | \alpha^{i}$$

Für die J_j^{*} sind die Ausdrücke (48) einzusetzen. Für die Auswertung dieser Formeln gilt sinngemäß das am Ende des Abschnittes 5 gesagte. Nur gehen hier noch zusätzlich die Abschätzungen für L, M, M_2 ein, während die Abschätzung für M_1 nicht benötigt wird. Auch hier sind die speziellen Formeln für Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung in Abschnitt 9 zusammengestellt. Für diese Differentialgleichungen sind auch Tabellen für die δ_j für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$ beigegeben.

Ein Vergleich der Formeln (36) und (48) lehrt, daß der Integrationsfehler beim ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz von der Ordnung $(n + 2)$ in h und beim erweiterten Ansatz von der Ordnung $(n + 3)$ ist. Die Koeffizienten $\gamma_{j\nu}$, die bei jenem für die Fortpflanzung des Fehlers kennzeichnend sind, sind hingegen kleiner als die $\gamma_{j\nu}^{*}$ des erweiterten Ansatzes. Jedoch werden die Fehler beim erweiterten Ansatz im allgemeinen unter denen des ursprünglichen bleiben, da ja bei jedem Schritt wieder der Integrationsfehler dazuzuzählen ist.

Aus der Bauart der Koeffizienten $\gamma_{j\nu}$, bzw. $\gamma_{j\nu}^{*}$ kann man erkennen, daß sich der Fehler am stärksten bei v^0 selbst fortpflanzt, während sich die Fortpflanzung bei den v^{ν} bei wachsendem ν immer weniger bemerkbar macht. Beim ersten Schritt sind die Fehler größenordnungsmäßig gleich. Beim zweiten Schritt wird der Fehler sprungartig größer, und zwar am stärksten bei v^{ν}, am schwächsten bei v^{n-1}. Andererseits sind an der Fortpflanzung des Fehlers bei v^{ν} wesentlich nur die Fehler der höheren Ableitungen beteiligt. Da diese im Verhältnis zu v^{ν} immer kleiner werden, wird sich diese Beeinflussung auch immer weniger auswirken.

Man vergleiche dazu die speziellen Formeln des Abschnittes 9 und das in Abschnitt 10 gerechnete Beispiel einer Differentialgleichung dritter Ordnung.

7. Independente Fehlerabschätzung.

Die Ungleichungen (37) und (49) haben die Bauart

$$z^{j}_{m+1} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu} z^{\nu}_{m} + J_j, \tag{51}$$

wobei

$$z^{\nu}_{m} = \left| \eta^{\nu}_{m} \right| \tag{52}$$

gesetzt wurde. Für die Ungleichungen (49) sind nur überall Sterne zu setzen. Alle in (51) auftretenden Größen sind positiv. Die Lösungen dieser Ungleichungen werden majorisiert durch die Lösungen des Systemes von n linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$z_j\,(m+1) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu}\, z_\nu\,(m) + J_j, \tag{53}$$

das nach bekannten Methoden gelöst werden kann, indem man eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systemes mit Hilfe des Ansatzes

$$\bar{z}_j = C_j = \text{konst.}$$

aufsucht und die allgemeine Lösung des homogenen Systemes durch den Ansatz

$$z_j\,(m) = d_j\, Z^m$$

bestimmt. Z ergibt sich als Lösung der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - Z, & \gamma_{12} & , \ldots, & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & , \gamma_{22} - Z, & \ldots, & \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \gamma_{n1} & , \gamma_{n2} & , \ldots, & \gamma_{nn} - Z \end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

Besitzt diese Gleichung lauter einfache Wurzeln Z_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), dann lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systemes:

$$\boxed{z_j\,(m) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e_{j\nu}\, Z^m_\nu + c_j,} \tag{55}$$

wobei die $e_{j\nu}$ n-Parameter enthalten, die aus den Anfangsbedingungen

$$z_j\,(0) = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

spezialisiert werden können. Besitzt die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, dann treten in (55) noch Polynome in m als Faktoren auf.

Manchmal wird es zweckmäßiger sein, die Ungleichungen (51) in Matrizenform zu schreiben und sich des Matrizenkalküls zu bedienen[8]. Dazu faßt man zweckmäßig die z_m^ν und J_ν zu den Vektoren $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{b}$ und die $\gamma_{j\nu}$ zur Matrix $\mathfrak{A}$ zusammen. Dann kann man (51) durch die Gleichung

$$\mathfrak{z}_{m+1} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}_m + \mathfrak{b}$$

ersetzen. Wegen $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{o}$ ergibt sich durch rekursives Einsetzen

$$\mathfrak{z}_{m+1} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{b} \tag{56}$$

mit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{E} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 + \ldots + \mathfrak{A}^m. \tag{57}$$

Diese Matrizensumme $\mathfrak{B}$ muß also berechnet werden. Dazu genügt es, für $m \geqq n$ die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2$, $\ldots$, $\mathfrak{A}^{n-1}$ durch Multiplizieren auszurechnen. Die höheren Potenzen ergeben sich aus diesen durch Anwendung der *Cayley-Hamilton*'schen Gleichung für die Matrix $\mathfrak{A}$:

$$p(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^n + a_1\mathfrak{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathfrak{A} + a_n\mathfrak{E} = 0,$$

die man aus

$$p(\lambda) = \left|\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\right| = 0$$

durch Ersetzen des λ durch $\mathfrak{A}$ erhält. Kennt man die charakteristischen Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Matrix $\mathfrak{A}$, dann lassen sich daraus explizite Formeln für die Summe (57) aufstellen. Für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ sind solche Formeln in [6], Seite 232 angegeben. Für Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung sind für den Fall lauter einfacher Wurzeln die Formeln in der für diese Zwecke brauchbarsten Form in Abschnitt 9 aufgenommen.

Es sei nochmals betont, daß in der Praxis meist die beim *Blaess*'schen Verfahren verhältnismäßig einfach durchzuführende rekursive Fehlerabschätzung mit intervallweise wechselnden Abschätzungen vorzuziehen sein wird.

8. Differentialgleichungen von der Form $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$.

Hängt f von der $(n-1)$-ten Ableitung nicht ab, dann wird mit dem ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz schon eine Genauigkeit wie sonst

[8] Für die folgenden Entwicklungen vergleiche man etwa [6].

nur mit dem erweiterten Ansatz erreicht. Es gilt nämlich dann $M' = 0$ und (36) ist zu ersetzen durch

$$J_j = M_3\, h^{n+3}\left[\frac{1}{n!\,3!}\sum_{i=0}^{k} i^3 \left|A_i^j\right| + \frac{k^{n-j+3}}{j!\,(n-j+3)!}\right]. \qquad (58)$$
$$j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Bemerkt sei noch, daß in diesem Sonderfall die Genauigkeit durch einen zu (8*) analogen Ansatz, nämlich durch

$$V^j{}_m{}^{**} = \sum_{i=0}^{k}\left[A_i^j + C_i^j\, f_{m,\, y^{(n-2)}}\, h^2\right] \tilde{f}_{m,i}\,\frac{h^n}{n!}$$

mit

$$f_{m,\, y^{(n-2)}} = f_{y^{(n-2)}}(x_m, y_m, \ldots, y_m^{(n-2)})$$

noch um eine Ordnung von h erhöht werden kann, so daß hier die Glieder bis einschließlich $(n+3)$-ter Ordnung in h genau abgeglichen werden. Dies soll hier aber nicht näher verfolgt werden.

9. Formeln für Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung.

Für $n = 2, 3$ und 4 sind nachfolgend die speziellen Formeln für das *Blaess*'sche Verfahren und für die Fehlerabschätzung zusammengestellt. Die Benützung dieser Formeln kann auch ohne Kenntnis der vorhergehenden Abschnitte erfolgen.

a) *Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

$$y'' = f(x, y, y')$$

Anfangsbedingungen: $x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0'$

Abkürzungen: $y'(x_i) = v_i$

$$f(x_i, y_i, v_i)\, h^2/2 = \alpha_i.$$

Blaess'sches Schema:

Zahl der Zwischenschritte: $k = 5$.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_{m,i} &= \tilde{y}_{m,i-1} + \tilde{v}_{m,i-1}\, h + \tilde{\alpha}_{mi-1} \\ \tilde{v}_{m,i}\, h &= \tilde{v}_{m,i-1}\, h + 2\,\tilde{\alpha}_{m,i-1} \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, 4, 5$$

mit

$$\tilde{y}_{m,0} = y_m,\ \tilde{v}_{m,0}\, h = v_m\, h$$
$$\tilde{\alpha}_{m,i} = f(x_{m,i}, \tilde{y}_{m,i}, \tilde{v}_{m,i})\, h^2/2.$$

Verbesserte Werte nach dem ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz:

$$y_{m+1} = \tilde{y}_{m,5} + V_m^0,\ V_m^0 = {}^1/_{24}\,(45\,\tilde{\alpha}_{m,4} + 100\,\tilde{\alpha}_{m,1} - 145\,\tilde{\alpha}_{m,0})$$
$$v_{m+1}\, h = \tilde{v}_{m,5}\, h + V_m^1,\ V_m^1 = {}^1/_{12}\,(11\,\tilde{\alpha}_{m,5} + 5\,\tilde{\alpha}_{m,1} - 16\,\tilde{\alpha}_{m,0}).$$

Verbesserte Werte nach dem erweiterten *Blaess*'schen Ansatz:

$$y^*_{m+1} = \tilde{y}_{m,5} + V^{0*}_m,\ V^{0*}_m = V^0_m + {}^{50}/_{12}\, f_v\, h\,(\tilde{\alpha}_{m,4} + \tilde{\alpha}_{m,1} - 2\,\tilde{\alpha}_{m,0})$$

$$v^*_{m+1}\, h = \tilde{v}_{m,5}\, h + V^{1*}_m,\ V^{1*}_m = V^1_m + {}^{25}/_{11}\, f_v\, h\,(\tilde{\alpha}_{m,5} + \tilde{\alpha}_{m,1} - 2\tilde{\alpha}_{m,0\,0})$$

Fehlerabschätzung für den ursprünglichen Ansatz:

η^0_m Fehler von y_m

η^1_m Fehler von $v_m\, h$

$$\alpha = 1 + h + K\,(h + h^2/2)$$

$$\beta_0 = {}^1/_{24}\,(71 + 268\,\alpha + 120\,\alpha^2 + 72\,\alpha^3 + 69\,\alpha^4)$$

$$\beta_1 = {}^1/_{12}\,(8 + 29\,\alpha + 24\,\alpha^2 + 24\,\alpha^3 + 24\,\alpha^4 + 11\,\alpha^5)$$

(β_0, β_1 sind in Tabelle 1 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$ tabelliert).

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\,\eta^j_{m+1}\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{1} \gamma_{j\nu}\,|\,\eta^\nu_m\,| + J_j, \qquad j = 0, 1$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00} &= 1 + K\,\beta_0\,\frac{h^2}{2},\ \gamma_{01} = 5 + K\,\beta_0\,\frac{h}{2} \\ \gamma_{10} &= \quad K\,\beta_1\,\frac{h^2}{2},\ \gamma_{11} = 1 + K\,\beta_1\,\frac{h}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$J_0 = {}^{125}/_{12}\,M'\,M_1\,h^4 + {}^{943}/_{18}\,M_3\,h^5$$

$$J_1 = {}^{25}/_{4}\,M'\,M_1\,h^4 + {}^{1255}/_{24}\,M_3\,h^5$$

Fehlerabschätzung für den erweiterten Ansatz:

η^{0*}_m Fehler von y^*_m

η^{1*}_m Fehler von $v^*_m\, h$

$$\delta_0 = {}^1/_{24}\,(200 + 100\,\alpha + 100\,\alpha^4)$$

$$\delta_1 = {}^1/_{12}\,(\ 50 + \ 25\,\alpha + \ 25\,\alpha^5)$$

(δ_0, δ_1 sind in Tabelle 1 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$ tabelliert).

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\,\eta^{j*}_{m+1}\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{1} \gamma^*_{j\nu}\,|\,\eta^{\nu*}_m\,| + J^*_j \qquad j = 0, 1$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00}{}^* &= 1 + \gamma_0\,\frac{h^2}{2},\ \gamma_{01}{}^* = 5 + \gamma_0\,\frac{h}{2} \\ \gamma_{10}{}^* &= \quad \gamma_1\,\frac{h^2}{2},\ \gamma_{11}{}^* = 1 + \gamma_1\,\frac{h}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\gamma_0 = K\,\beta_0 + (K\,M'\,\delta_0 + {}^{50}/_{3}\,L\,M)\,h$$

$$\gamma_1 = K\,\beta_1 + (K\,M'\,\delta_1 + {}^{25}/_{3}\,L\,M)\,h$$

$$J_0{}^* = [{}^{943}/_{18}\,M_3 + {}^{425}/_{24}\,M'\,M_2]\,h^5$$

$$J_1{}^* = [{}^{1255}/_{24}\,M_3 + {}^{325}/_{24}\,M'\,M_2]\,h^5$$

Independente Fehlerabschätzung für beide Ansätze:

(Für den erweiterten Ansatz sind Sterne zu setzen.)

$$\mathfrak{z}_m = (\,|\,\eta_m^0\,|,\ |\,\eta_m^1\,|\,) \qquad \mathfrak{A} = (\gamma_{jv})$$
$$\mathfrak{b} = (J_0,\ J_1)$$

λ_1, λ_2 Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{A}$.
(Es kommen hier nur einfache Wurzeln in Frage).

$$\mathfrak{z}_m = \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}$$

mit

$$\mathfrak{B} = (\sigma_1 + \sigma_2)\,\mathfrak{A} - (\lambda_2\,\sigma_1 + \lambda_1\,\sigma_2)\,\mathfrak{E}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{1 - \lambda_1^m}{1 - \lambda_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1 - \lambda_2^m}{1 - \lambda_2}$$

b) *Differentialgleichungen dritter Ordnung.*

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

Anfangsbedingungen:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = v_0,\ y'' = w_0.$$

Abkürzungen:

$$y'(x_i) = v_i, \quad w_i\,h^2/2 = \alpha_i$$
$$y''(x_i) = w_i; \quad f_i\,h^3/3! = \beta_i$$

Blaess'sches Schema:

Zahl der Zwischenschritte: $k = 4$.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_{m,i} &= \tilde{y}_{m,i-1} + \tilde{v}_{m,i-1}\,h + \tilde{\alpha}_{m,i-1} + \tilde{\beta}_{m,i-1} \\ \tilde{v}_{m,i}\,h &= \tilde{v}_{m,i-1}\,h + \tilde{\alpha}_{m,i-1} + \tilde{\beta}_{m,i-1} \\ \tilde{\alpha}_{m,i} &= \tilde{\alpha}_{m,i-1} + 3\,\tilde{\beta}_{m,i-1} \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, 4$$

mit

$$\tilde{y}_{m,0} = y_m \qquad \tilde{\alpha}_{m,0} = \alpha_m$$
$$\tilde{v}_{m,0}\,h = v_m\,h \qquad \tilde{\beta}_{m,i} = f(x_{m,i},\ \tilde{y}_{m,i},\ \tilde{v}_{m,i},\ \tilde{w}_{m,i})\,h^3/3!$$

Verbesserte Werte nach dem ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= \tilde{y}_{m,4} + V_m^0, & V_m^0 &= {}^1/_{15}\,(46\,\tilde{\beta}_{m,3} + 282\,\tilde{\beta}_{m,1} - 328\,\tilde{\beta}_{m,0}) \\ v_{m+1}\,h &= \tilde{v}_{m,4}\,h + V_m^1, & V_m^1 &= {}^1/_3\,(14\,\tilde{\beta}_{m,3} + 24\,\tilde{\beta}_{m,1} - 38\,\tilde{\beta}_{m,0}) \\ \alpha_{m+1} &= \tilde{\alpha}_{m,4} + V_m^2, & V_m^2 &= {}^1/_3\,(4\,\tilde{\beta}_{m,4} + 2\,\tilde{\beta}_{m,1} - 6\,\tilde{\beta}_{m,0}) \end{aligned}$$

Verbesserte Werte nach dem erweiterten *Blaess*'schen Ansatz:

$$y^*_{m+1} = \tilde{y}_{m,4} + V^{0*}_m,\ V^{0*}_m = V^0_m + 8 f_w h (\tilde{\beta}_{m,4} - \tilde{\beta}_{m,0})$$
$$v^*_{m+1} h = \tilde{v}_{m,4} h + V^{1*}_m,\ V^{1*}_m = V^1_m + 8 f_w h (\tilde{\beta}_{m,4} - \tilde{\beta}_{m,0})$$
$$\alpha^*_{m+1} = \tilde{\alpha}_{m,4} + V^{2*}_m,\ V^{2*}_m = V^2_m + 3 f_w h (\tilde{\beta}_{m,4} - \tilde{\beta}_{m,0})$$

Fehlerabschätzung für den ursprünglichen Ansatz:

η^0_m Fehler von y_m
η^1_m Fehler von $v_m h$
η^2_m Fehler von α_m

$$\alpha = 1 + h + \frac{h^2}{2} + K\left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!}\right)$$

$$\beta_0 = {}^1/_{15}\,(227 + 567\,\alpha + 105\,\alpha^2 + 61\,\alpha^3)$$
$$\beta_1 = {}^1/_{3}\,(\ 25 + \ 69\,\alpha + \ 27\,\alpha^2 + 23\,\alpha^3)$$
$$\beta_2 = {}^1/_{3}\,(\ \ 3 + \ 11\,\alpha + \ \ 9\,\alpha^2 + \ 9\,\alpha^3 + 4\,\alpha^4)$$

(β_0, β_1, β_2 in Tabelle 2 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$).

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\,\eta^j_{m+1}\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{2} \gamma_{j\nu}\,|\,\eta^\nu_m\,| + J_j \qquad j = 0, 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00} &= 1 + K\beta_0\frac{h^3}{6},\ \gamma_{01} = 4 + K\beta_0\frac{h^2}{6},\ \gamma_{02} = 16 + K\beta_0\frac{h}{3}\\
\gamma_{10} &= \quad K\beta_1\frac{h^3}{6},\ \gamma_{11} = 1 + K\beta_1\frac{h^2}{6},\ \gamma_{12} = \ 8 + K\beta_1\frac{h}{3}\\
\gamma_{20} &= \quad K\beta_2\frac{h^3}{6},\ \gamma_{21} = \quad K\beta_2\frac{h^2}{6},\ \gamma_{22} = \ 1 + K\beta_2\frac{h}{3}
\end{aligned}\right\}$$

$$J_0 = {}^{16}/_{3}\,M'\,M_1\,h^5 + {}^{1021}/_{90}\,M_3\,h^6$$
$$J_1 = {}^{16}/_{3}\,M'\,M_1\,h^5 + {}^{1523}/_{90}\,M_3\,h^6$$
$$J_2 = \ \ 2\,M'\,M_1\,h^5 + {}^{193}/_{18}\ M_3\,h^6$$

Fehlerabschätzung für den erweiterten Ansatz:

$\eta^0_m{}^*$ Fehler von $y_m{}^*$
$\eta^1_m{}^*$ Fehler von $v_m{}^* h$
$\eta^2_m{}^*$ Fehler von $\alpha_m{}^*$

$$\delta_0 = \delta_1 = 8\,(1 + \alpha^4)$$
$$\delta_2 \quad\ = 3\,(1 + \alpha^4)$$

(δ_0, δ_1, δ_2 in Tabelle 2 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$).

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\,\eta^{j*}_{m+1}\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{2} \gamma_{j\nu}{}^*\,|\,\eta^\nu_m{}^*\,| + J_j{}^* \qquad j = 0, 1, 2$$

$$\left.\begin{array}{lll} \gamma_{00}^* = 1 + \gamma_0 \dfrac{h^3}{6}, & \gamma_{01}^* = 4 + \gamma_0 \dfrac{h^2}{6}, & \gamma_{02}^* = 16 + \gamma_0 \dfrac{h}{3} \\ \gamma_{10}^* = \gamma_1 \dfrac{h^3}{6}, & \gamma_{11}^* = 1 + \gamma_1 \dfrac{h^2}{6}, & \gamma_{12}^* = 8 + \gamma_1 \dfrac{h}{3} \\ \gamma_{20}^* = \gamma_2 \dfrac{h^3}{6}, & \gamma_{21}^* = \gamma_2 \dfrac{h^2}{6}, & \gamma_{22}^* = 1 + \gamma_2 \dfrac{h}{3} \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= K\beta_0 + (K M' \delta_0 + 16 L M) h \\ \gamma_1 &= K\beta_1 + (K M' \delta_1 + 16 L M) h \\ \gamma_2 &= K\beta_2 + (K M' \delta_2 + 6 L M) h \\ J_0^* &= [{}^{1021}/_{90} M_3 + {}^{32}/_3 M' M_2] h^6 \\ J_1^* &= [{}^{1523}/_{18} M_3 + {}^{32}/_3 M' M_2] h^6 \\ J_2^* &= [{}^{193}/_{18} M_3 + 4 M' M_2] h^6 \end{aligned}$$

Independente Fehlerabschätzung für beide Ansätze:
(Für den erweiterten Ansatz sind Sterne zu setzen.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_m &= (\,|\,\eta_m^0\,|,\ |\,\eta_m^1\,|,\ |\,\eta_m^2\,|\,) \\ \mathfrak{b} &= (J_0,\ J_1,\ J_2) \end{aligned} \qquad \mathfrak{A} = (\gamma_{jv}).$$

λ_0, λ_1, λ_2 Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{A}$.
Sind diese voneinander verschieden, dann gilt:

$$\mathfrak{d}_m = \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}$$

mit

$$\mathfrak{B} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\,\mathfrak{A}^2 - [(\lambda_2 + \lambda_3)\,\sigma_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\,\sigma_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\,\sigma_3]\,\mathfrak{A} + (\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2 + \lambda_1 \lambda_3 \sigma_2 + \lambda_1 \lambda_2 \sigma_3)\,\mathfrak{E}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \cdot \frac{1 - \lambda_1^m}{1 - \lambda_1} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot \frac{1 - \lambda_2^m}{1 - \lambda_2} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \cdot \frac{1 - \lambda_3^m}{1 - \lambda_3}. \end{aligned}$$

c) *Differentialgleichungen vierter Ordnung.*

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

Anfangsbedingungen:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = v_0,\ y'' = w_0,\ y''' = z_0.$$

Abkürzungen:

$$y'\ (x_i) = v_i \qquad w_i \frac{h^2}{2!} = \alpha_i$$

$$y''\ (x_i) = w_i \qquad z_i \frac{h^3}{3!} = \beta_i$$

$$y'''(x_i) = z_i \qquad f_i \frac{h^4}{4!} = \gamma_i$$

Blaess'sches Schema:

Zahl der Zwischenschritte: $k = 4$.

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{y}_{m,i} &= \tilde{y}_{m,i-1} + \tilde{v}_{m,i-1} h + \tilde{\alpha}_{m,i-1} + \tilde{\beta}_{m,i-1} + \tilde{\gamma}_{m,i-1} \\
\tilde{v}_{m,i} h &= \tilde{v}_{m,i-1} h + 2\tilde{\alpha}_{m,i-1} + 2\tilde{\beta}_{m,i-1} + \tilde{\gamma}_{m,i-1} \\
\tilde{\alpha}_{m,i} &= \tilde{\alpha}_{m,i-1} + 3\tilde{\beta}_{m,i-1} + 6\tilde{\gamma}_{m,i-1} \\
\tilde{\beta}_{m,i} &= \tilde{\beta}_{m,i-1} + 4\tilde{\gamma}_{m,i-1}
\end{aligned}\right\} = 1, 2, 3, 4$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{m,0} &= y_m & \tilde{\beta}_{m,0} &= \beta_m \\
\tilde{v}_{m,0} h &= v_m h & \tilde{\gamma}_{m,i} &= f(x_{m,i}, \tilde{y}_{m,i}, \tilde{v}_{m,i}, \tilde{w}_{m,i}, \tilde{z}_{m,i}) \\
\tilde{\alpha}_{m,0} &= \alpha_m
\end{aligned}$$

Verbesserte Werte nach dem ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_{m+1} &= \tilde{y}_{m,4} + V_m^0, & V_m^0 &= {}^1/_{45}(242\,\tilde{\gamma}_{m,3} + 4080\,\tilde{\gamma}_{m,1} - 4322\,\tilde{\gamma}_{m,0}) \\
v_{m+1} h &= \tilde{v}_{m,4} h + V_m^1, & V_m^1 &= {}^1/_{15}(184\,\tilde{\gamma}_{m,3} + 1128\,\tilde{\gamma}_{m,1} - 1312\,\tilde{\gamma}_{m,0}) \\
\alpha_{m+1} &= \tilde{\alpha}_{m,4} + V_m^2, & V_m^2 &= {}^1/_{3}(28\,\tilde{\gamma}_{m,3} + 48\,\tilde{\gamma}_{m,1} - 76\,\tilde{\gamma}_{m,0}) \\
\beta_{m+1} &= \tilde{\beta}_{m,4} + V_m^3, & V_m^3 &= {}^1/_{9}(16\,\tilde{\gamma}_{m,4} + 8\,\tilde{\gamma}_{m,1} - 24\,\tilde{\gamma}_{m,0})
\end{aligned}$$

Verbesserte Werte nach dem erweiterten *Blaess*'schen Ansatz:

$$\begin{aligned}
y^*_{m+1} &= \tilde{y}_{m,4} + V_m^{0*}, & V_m^{0*} &= V_m^0 + {}^{128}/_5 f_z h (\tilde{\gamma}_{m,4} - \tilde{\gamma}_{m,0}) \\
v^*_{m+1} h &= \tilde{v}_{m,4} h + V_m^{1*}, & V_m^{1*} &= V_m^1 + 32 f_z h (\tilde{\gamma}_{m,4} - \tilde{\gamma}_{m,0}) \\
\alpha^*_{m+1} &= \tilde{\alpha}_{m,4} + V_m^{2*}, & V_m^{2*} &= V_m^2 + 16 f_z h (\tilde{\gamma}_{m,4} - \tilde{\gamma}_{m,0}) \\
\beta^*_{m+1} &= \tilde{\beta}_{m,4} + V_m^{3*}, & V_m^{3*} &= V_m^3 + 4 f_z h (\tilde{\gamma}_{m,4} - \tilde{\gamma}_{m,0})
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung für den ursprünglichen Ansatz:

η_m^0 Fehler von y_m
η_m^1 Fehler von $v_m h$
η_m^2 Fehler von α_m
η_m^3 Fehler von β_m

$$\alpha = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + K\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right)$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= {}^1/_{45}(3553 + 7005\,\alpha + 675\,\alpha^2 + 287\,\alpha^3) \\
\beta_1 &= {}^1/_{15}(908 + 2268\,\alpha + 420\,\alpha^2 + 244\,\alpha^3) \\
\beta_2 &= {}^1/_{3}(50 + 138\,\alpha + 54\,\alpha^2 + 46\,\alpha^3) \\
\beta_3 &= {}^1/_{9}(12 + 44\,\alpha + 36\,\alpha^2 + 36\,\alpha^3 + 16\,\alpha^4)
\end{aligned}$$

($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ in Tabelle 3 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$).

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\eta_{m+1}^j| \leqq \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_{j\nu} |\eta_m^\nu| + J_j \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00} &= 1 + K\beta_0 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{01} &= 4 + K\beta_0 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{02} &= 16 + K\beta_0 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{03} &= 64 + K\beta_0 \frac{h}{4} \\
\gamma_{10} &= K\beta_1 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{11} &= 1 + K\beta_1 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{12} &= 8 + K\beta_1 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{13} &= 48 + K\beta_1 \frac{h}{4} \\
\gamma_{20} &= K\beta_2 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{21} &= K\beta_2 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{22} &= 1 + K\beta_2 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{23} &= 12 + K\beta_2 \frac{h}{4} \\
\gamma_{30} &= K\beta_3 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{31} &= K\beta_3 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{32} &= K\beta_3 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{33} &= 1 + K\beta_3 \frac{h}{4}
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
J_0 &= {}^{64}/_{15}\, M'\, M_1\, h^6 + {}^{4433}/_{560}\, M_3\, h^7 \\
J_1 &= {}^{16}/_{3}\, M'\, M_1\, h^6 + {}^{1021}/_{90}\, M_3\, h^7 \\
J_2 &= {}^{8}/_{3}\, M'\, M_1\, h^6 + {}^{1523}/_{180}\, M_3\, h^7 \\
J_3 &= {}^{2}/_{3}\, M'\, M_1\, h^6 + {}^{193}/_{54}\, M_3\, h^7
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung für den erweiterten Ansatz:

$\eta_m^0{}^*$ Fehler von $y_m{}^*$
$\eta_m^1{}^*$ Fehler von $v_m{}^* h$
$\eta_m^2{}^*$ Fehler von $\alpha_m{}^*$
$\eta_m^3{}^*$ Fehler von $\beta_m{}^*$

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= {}^{128}/_{5}\,(1 + \alpha^4) \\
\delta_1 &= 32\,(1 + \alpha^4) \\
\delta_2 &= 16\,(1 + \alpha^4) \\
\delta_3 &= 4\,(1 + \alpha^4)
\end{aligned}$$

(δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 in Tabelle 4 für $\alpha = 1.000$ bis $\alpha = 1.250$.)

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\eta_{m+1}^j| \leqq \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_{j\nu}{}^* |\eta_m^\nu{}^*| + J_j{}^* \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00}{}^* &= 1 + \gamma_0 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{01}{}^* &= 4 + \gamma_0 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{02}{}^* &= 16 + \gamma_0 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{03}{}^* &= 64 + \gamma_0 \frac{h}{4} \\
\gamma_{10}{}^* &= \gamma_1 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{11}{}^* &= 1 + \gamma_1 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{12}{}^* &= 8 + \gamma_1 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{13}{}^* &= 48 + \gamma_1 \frac{h}{4} \\
\gamma_{20}{}^* &= \gamma_2 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{21}{}^* &= \gamma_2 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{22}{}^* &= 1 + \gamma_2 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{23}{}^* &= 12 + \gamma_2 \frac{h}{4} \\
\gamma_{30}{}^* &= \gamma_3 \frac{h^4}{24}, & \gamma_{31}{}^* &= \gamma_3 \frac{h^3}{24}, & \gamma_{32}{}^* &= \gamma_3 \frac{h^2}{12}, & \gamma_{33}{}^* &= 1 + \gamma_3 \frac{h}{4}
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= K\beta_0 + (K\, M'\, \delta_0 + {}^{256}/_{5}\, L\, M)\, h \\
\gamma_1 &= K\beta_1 + (K\, M'\, \delta_1 + 64\, L\, M)\, h \\
\gamma_2 &= K\beta_2 + (K\, M'\, \delta_2 + 32\, L\, M)\, h \\
\gamma_3 &= K\beta_3 + (K\, M'\, \delta_3 + 8\, L\, M)\, h
\end{aligned}$$

$$J_0^* = [{}^{4433}/_{560}\, M_3 + {}^{1039}/_{120}\, M'\, M_2]\, h^7$$
$$J_1^* = [{}^{1021}/_{90}\, M_3 + {}^{32}/_{3}\, M'\, M_2]\, h^7$$
$$J_2^* = [{}^{1523}/_{180}\, M_3 + {}^{16}/_{3}\, M'\, M_2]\, h^7$$
$$J_3^* = [{}^{193}/_{54}\, M_3 + {}^{4}/_{3}\, M'\, M_2]\, h^7$$

Independente Fehlerabschätzung für beide Ansätze:
Für den erweiterten Ansatz sind Sterne zu setzen.

$$\mathfrak{z}_m = (|\eta_m^0|, |\eta_m^1|, |\eta_m^2|, |\eta_m^3|) \qquad \mathfrak{A} = (\gamma_{jv}).$$
$$\mathfrak{b} = (J_0, J_1, J_2, J_3)$$

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{A}$. Sind diese voneinander verschieden, dann gilt:

$$\mathfrak{z}_m = \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}$$

mit

$$\mathfrak{B} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)\,\mathfrak{A}^3 - [(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\,\sigma_1 + (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\,\sigma_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)\,\sigma_3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\sigma_4]\,\mathfrak{A}^2 + [(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)\,\sigma_1 + (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_4)\,\sigma_2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_4)\,\sigma_3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\,\sigma_4]\,\mathfrak{A} - [\lambda_2\lambda_3\lambda_4\sigma_1 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\sigma_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\sigma_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\sigma_4]\,\mathfrak{E}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} \cdot \frac{1-\lambda_1^m}{1-\lambda_1}$$
$$\sigma_2 = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} \cdot \frac{1-\lambda_2^m}{1-\lambda_2}$$
$$\sigma_3 = \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)} \cdot \frac{1-\lambda_3^m}{1-\lambda_3}$$
$$\sigma_4 = \frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \cdot \frac{1-\lambda_4^m}{1-\lambda_4}$$

10. Beispiel einer Differentialgleichung dritter Ordnung.[9]

Es sei eine Abschätzung des Fehlers, der bei der Behandlung der Anfangswertaufgabe

$$y''' = -\,y\,y'',$$
$$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

mit Hilfe des *Blaess*'schen Verfahrens (mit dem ursprünglichen Verbesserungssatz) auftreten kann, gesucht. Die Schrittweite sei $h = 0.05$.

[9] Dieses Beispiel ist dem Werk [4] entnommen, wo es mit Hilfe des *Runge-Kutta*-Verfahrens und des Differenzenschemaverfahrens angenähert gelöst wird. Auf dieses Beispiel kann man eine Randwertaufgabe, die in der *Prandtl*'schen Tragflügeltheorie auftritt, zurückführen.

Der Fehler für die ersten vier Schritte, also für $x = 0.20,\ 0.40,\ 0.60$ und 0.80 sei zu bestimmen. Zunächst findet man folgende Abschätzungen:

x	K	M'	M_1	M_3
0.00—0.20	1.00	0.03	0.25	0.34
0.20—0.40	1.00	0.13	0.50	1.40
0.40—0.60	1.00	0.30	0.75	3.18
0.60—0.80	1.00	0.48	0.90	4.70

und daher folgende Integrationsfehler:

x	J_0	J_1	J_2	
0.20	7.28	10.24	6.17	$.10^{-8}$
0.40	35.66	47.87	27.51	$.10^{-8}$
0.60	93.87	121.59	67.43	$.10^{-8}$
0.80	157.31	199.27	106.86	$.10^{-8}$

Die γ_{jr} sind wegen der Konstanz von h und K während aller Schritte konstant:

$$\gamma_{00} = 1.0015,\ \gamma_{01} = 4.03\ ,\ \gamma_{02} = 17.18$$
$$\gamma_{10} = 0.0011,\ \gamma_{11} = 1.02\ ,\ \gamma_{12} = 8.92$$
$$\gamma_{20} = 0.0003,\ \gamma_{21} = 0.006,\ \gamma_{22} = 1.25.$$

Mit diesen Werten findet man dann rekursiv folgende Fehler:

x	$\eta_m{}^0$	$\eta_m{}^1$	$\eta_m{}^2$	
0.20	7.3	10.2	6.2	$.10^{-8}$
0.40	19.4	11.4	3.5	$.10^{-7}$
0.60	13.4	5.5	1.1	$.10^{-6}$
0.80	56.1	17.4	2.5	$.10^{-6}$

Die Werte von v_m^0 und v_m^1 sind also bei $x = 0.80$ sicher noch auf vier, die von v_m^2 sogar auf fünf Dezimalen verläßlich.

Literatur.

[1] *L. Collatz:* „Differenzenschemaverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung". Z. angew. Math. Mech., Bd. 29 (1949), S. 199—209.

[2] *R. Zurmühl:* „Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen n-ter Ordnung". Z. angew. Math. Mech., Bd. 28 (1948), S. 173—182.

[3] *E. Bukovics:* „Eine Verbesserung und Verallgemeinerung des Verfahren von Blaess zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen". Österr. Ing.-Arch., Bd. 4 (1950), S. 338—349.

[4] *L. Collatz:* Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, 1951.

[5] *L. Lieberbach:* „On the remainder of the Runge-Kutta Formula in the theory of ordinary differential equations". Z. angew. Phys., Bd. 2 (1951), S. 233—248.

[6] *R. Zurmühl:* Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Berlin, 1950.

Tab. 1. Die Größen β_i u. δ_i für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a	β_0	β_1	δ_0	δ_1
1.000	25.00	10.00	16.67	8.33
1.005	25.21	10.13	16.76	8.40
1.010	25.42	10.25	16.87	8.46
1.015	25.63	10.38	16.98	8.53
1.020	25.85	10.51	17.09	8.59
1.025	26.06	10.64	17.20	8.66
1.030	26.28	10.78	17.31	8.73
1.035	26.50	10.91	17.43	8.80
1.040	26.72	11.05	17.54	8.87
1.045	26.94	11.19	17.66	8.94
1.050	27.16	11.33	17.77	9.01
1.055	27.39	11.47	17.89	9.09
1.060	27.62	11.61	18.01	9.16
1.065	27.84	11.75	18.13	9.24
1.070	28.07	11.90	18.25	9.32
1.075	28.31	12.05	18.38	9.40
1.080	28.54	12.20	18.50	9.48
1.085	28.78	12.35	18.63	9.56
1.090	29.01	12.50	18.76	9.64
1.095	29.25	12.65	18.89	9.73
1.100	29.50	12.81	19.02	9.81
1.105	29.74	12.97	19.15	9.90
1.110	29.98	13.13	19.28	9.99
1.115	30.23	13.29	19.42	10.08
1.120	30.48	13.45	19.56	10.17
1.125	30.73	13.62	19.70	10.26
1.130	30.98	13.79	19.84	10.36
1.135	31.23	13.96	19.98	10.46
1.140	31.49	14.13	20.12	10.55
1.145	31.75	14.30	20.27	10.65
1.150	32.00	14.47	20.41	10.75
1.155	32.26	14.65	20.56	10.86
1.160	32.53	14.83	20.71	10.96
1.165	32.79	15.01	20.86	11.06
1.170	33.06	15.19	21.02	11.17
1.175	33.33	15.38	21.17	11.28
1.180	33.60	15.56	21.33	11.39
1.185	33.87	15.75	21.49	11.50
1.190	34.15	15.94	21.65	11.62
1.195	34.43	16.14	21.81	11.73
1.200	34.70	16.33	21.97	11.85
1.205	34.98	16.53	22.14	11.97
1.210	35.27	16.73	22.31	12.09
1.215	35.55	16.93	22.48	12.21
1.220	35.84	17.13	22.64	12.34
1.225	36.12	17.34	22.82	12.47
1.230	36.42	17.54	23.00	12.59
1.235	36.71	17.75	23.17	12.72
1.240	37.01	17.97	23.35	12.86
1.245	37.31	18.18	23.53	12.99
1.250	37.61	18.40	23.71	13.13

Tab. 2. Die Größen β_i u. δ_i für Differentialgleichungen dritter Ordnung.

α	β_0	β_1	β_2	$\delta_0 = \delta_1$	δ_2
1.000	64.00	48.00	12.00	16.00	6.00
1.005	64.32	48.32	12.12	16.16	6.06
1.010	64.64	48.64	12.24	16.32	6.12
1.015	64.96	48.97	12.36	16.49	6.18
1.020	65.29	49.29	12.49	16.66	6.25
1.025	65.61	49.62	12.61	16.83	6.31
1.030	65.94	49.95	12.74	17.00	6.38
1.035	66.26	50.28	12.86	17.18	6.44
1.040	66.59	50.61	12.99	17.36	6.51
1.045	66.92	50.95	13.12	17.54	6.58
1.050	67.25	51.28	13.25	17.72	6.65
1.055	67.58	51.62	13.38	17.91	6.72
1.060	67.91	51.96	13.51	18.10	6.79
1.065	68.24	52.30	13.65	18.29	6.86
1.070	68.58	52.64	13.78	18.49	6.93
1.075	68.91	52.98	13.92	18.68	7.01
1.080	69.24	53.33	14.05	18.88	7.08
1.085	69.58	53.68	14.19	19.09	7.16
1.090	69.92	54.02	14.33	19.29	7.24
1.095	70.26	54.37	14.47	19.50	7.31
1.100	70.60	54.73	14.61	19.71	7.39
1.105	70.94	55.08	14.75	19.93	7.47
1.110	71.28	55.44	14.89	20.14	7.55
1.115	71.62	55.79	15.04	20.36	7.64
1.120	71.96	56.15	15.18	20.59	7.72
1.125	72.31	56.51	15.33	20.81	7.81
1.130	72.65	56.88	15.48	21.04	7.89
1.135	73.00	57.24	15.63	21.28	7.98
1.140	73.35	57.61	15.78	21.51	8.07
1.145	73.70	57.98	15.93	21.75	8.16
1.150	74.05	58.35	16.08	21.99	8.25
1.155	74.40	58.72	16.23	22.24	8.34
1.160	74.75	59.09	16.39	22.48	8.43
1.165	75.10	59.47	16.54	22.74	8.53
1.170	75.45	59.84	16.70	22.99	8.62
1.175	75.81	60.22	16.86	23.25	8.72
1.180	76.17	60.60	17.02	23.51	8.82
1.185	76.52	60.98	17.18	23.77	8.92
1.190	76.88	61.37	17.34	24.04	9.02
1.195	77.24	61.76	17.50	24.31	9.12
1.200	77.60	62.14	17.67	24.59	9.22
1.205	77.96	62.53	17.83	24.87	9.32
1.210	78.32	62.92	18.00	25.15	9.43
1.215	78.69	63.32	18.17	25.43	9.54
1.220	79.06	63.71	18.34	25.72	9.65
1.225	79.42	64.10	18.51	26.01	9.76
1.230	79.78	64.50	18.68	26.31	9.87
1.235	80.16	64.91	18.86	26.61	9.98
1.240	80.52	65.31	19.03	26.91	10.09
1.245	80.89	65.71	19.21	27.22	10.21
1.250	81.26	66.12	19.39	27.53	10.32

Tabelle 3. Die Größen β_i für Differentialgleichungen vierter Ordnung.

α	β_0	β_1	β_2	β_3
1.000	256.00	256.00	96.00	16.00
1.005	257.02	257.28	96.64	16.16
1.010	258.05	258.57	97.29	16.32
1.015	259.08	259.86	97.94	16.49
1.020	260.11	261.15	98.59	16.65
1.025	261.14	262.46	99.24	16.82
1.030	262.17	263.75	99.90	16.98
1.035	263.21	265.05	100.56	17.15
1.040	264.25	266.36	101.22	17.32
1.045	265.29	267.67	101.89	17.50
1.050	266.33	268.99	102.56	17.67
1.055	267.37	270.31	103.24	17.84
1.060	268.41	271.64	103.91	18.02
1.065	269.46	272.97	104.59	18.20
1.070	270.51	274.30	105.28	18.37
1.075	271.56	275.64	105.97	18.55
1.080	272.61	276.99	106.66	18.74
1.085	273.66	278.32	107.35	18.92
1.090	274.71	279.67	108.05	19.10
1.095	275.77	281.03	108.75	19.29
1.100	276.83	282.38	109.46	19.48
1.105	277.89	283.74	110.16	19.67
1.110	278.95	285.11	110.87	19.86
1.115	280.01	286.48	111.59	20.05
1.120	281.08	287.85	112.31	20.24
1.125	282.15	289.23	113.03	20.44
1.130	283.22	290.61	113.76	20.64
1.135	284.29	292.00	114.49	20.83
1.140	285.36	293.39	115.22	21.03
1.145	286.43	294.78	115.95	21.24
1.150	287.51	296.19	116.69	21.44
1.155	288.59	297.59	117.43	21.64
1.160	289.67	298.99	118.18	21.84
1.165	290.75	300.40	118.93	22.05
1.170	291.83	301.82	119.68	22.27
1.175	292.92	303.24	120.44	22.48
1.180	294.01	304.66	121.20	22.69
1.185	295.10	306.09	121.97	22.90
1.190	296.19	307.52	122.74	23.12
1.195	297.28	308.96	123.51	23.34
1.200	298.38	310.40	124.28	23.56
1.205	299.47	311.85	125.06	23.78
1.210	300.57	313.30	125.85	24.00
1.215	301.67	314.75	126.63	24.23
1.220	302.78	316.21	127.42	24.45
1.225	303.88	317.67	128.21	24.68
1.230	304.99	319.14	129.01	24.91
1.235	306.10	320.61	129.81	25.14
1.240	307.21	322.09	130.62	25.37
1.245	308.32	323.57	131.43	25.61
1.250	309.43	325.05	132.24	25.85

Tabelle 4. Die Größen δ_i für Differentialgleichungen vierter Ordnung.

α	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
1.000	51.20	64.00	32.00	8.00
1.005	51.72	64.65	32.32	8.08
1.010	52.24	65.30	32.65	8.16
1.015	52.77	65.96	32.98	8.25
1.020	53.31	66.64	33.32	8.33
1.025	53.86	67.32	33.66	8.42
1.030	54.41	68.02	34.01	8.50
1.035	54.98	68.72	34.36	8.59
1.040	55.55	69.44	34.72	8.68
1.045	56.13	70.16	35.08	8.77
1.050	56.72	70.90	35.45	8.86
1.055	57.31	71.64	35.82	8.96
1.060	57.92	72.40	36.20	9.05
1.065	58.53	73.17	36.58	9.15
1.070	59.15	73.95	36.97	9.24
1.075	59.78	74.74	37.36	9.34
1.080	60.43	75.54	37.76	9.44
1.085	61.08	76.35	38.17	9.54
1.090	61.74	77.17	38.58	9.65
1.095	62.41	78.01	39.00	9.75
1.100	63.08	78.85	39.42	9.86
1.105	63.77	79.71	39.85	9.96
1.110	64.46	80.58	40.29	10.07
1.115	65.17	81.46	40.73	10.18
1.120	65.88	82.35	41.18	10.29
1.125	66.61	83.26	41.63	10.41
1.130	67.34	84.18	42.09	10.52
1.135	68.08	85.10	42.55	10.64
1.140	68.83	86.04	43.02	10.76
1.145	69.60	87.00	43.50	10.87
1.150	70.37	87.96	43.98	11.00
1.155	71.16	88.94	44.47	11.12
1.160	71.95	89.94	44.97	11.24
1.165	72.76	90.94	45.47	11.37
1.170	73.57	91.96	45.98	11.50
1.175	74.40	93.00	46.50	11.62
1.180	75.23	94.04	47.02	11.75
1.185	76.08	95.10	47.55	11.89
1.190	76.94	96.17	48.08	12.02
1.195	77.80	97.25	48.63	12.16
1.200	78.68	98.35	49.18	12.29
1.205	79.57	99.47	49.73	12.43
1.210	80.47	100.59	50.30	12.57
1.215	81.39	101.73	50.87	12.72
1.220	82.31	102.89	51.44	12.86
1.225	83.25	104.06	52.03	13.01
1.230	84.19	105.24	52.62	13.16
1.235	85.15	106.44	53.22	13.31
1.240	86.12	107.65	53.83	13.46
1.245	87.10	108.88	54.44	13.61
1.250	88.10	110.12	55.06	13.77

Über Gitter und Polyeder.

Von

H. Hadwiger, Bern.

(Eingelangt am 21. April 1953.)

I. Gruppe, Gitter und Polyeder.

Es bezeichne R den k-dimensionalen euklidischen Raum und Γ sei eine *kristallographische Gruppe*, d. h. eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe in R mit endlichem Fundamentalbereich[1]. Eine Bewegung $\alpha \in \Gamma$ führe einen Punkt $p \in R$ in den äquivalenten Punkt $p^\alpha \in R$ über. Bedeutet A ein Polyeder, so bezeichnen wir analog das durch Ausführung der Bewegung aus A hervorgehende Polyeder durch A^α.

Zwei Polyeder A und B wollen wir *Γ-gleich* nennen, symbolisch durch $A \simeq B$ ausgedrückt, wenn für ein geeignetes $\alpha \in \Gamma$ die Identität $A^\alpha = B$ gilt. Weiter sollen zwei eigentliche Polyeder A und B *Γ-zerlegungsgleich* genannt werden, symbolisch durch $A \sim B$ zum Ausdruck gebracht, wenn sich A und B im Sinne der Elementargeometrie je in endlich viele eigentliche Teilpolyeder A_i und B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zerlegen lassen, welche paarweise *Γ-gleich* sind, so daß $A_i \simeq B_i$ gilt. Verwenden wir zur symbolischen Darstellung einer elementargeometrischen Zerlegung eines Polyeders das übliche Summenzeichen, so läßt sich also die soeben definierte Verwandtschaft durch $A = \sum_1^n A_i$, $B = \sum_1^n B_i$, $A_i \simeq B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ formelmäßig charakterisieren.

Die Verwandtschaften Γ-gleich und Γ-zerlegungsgleich sind, wie man sich leicht überlegt, *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*.

Der Gruppe Γ läßt sich ein maximales abgeschlossenes Polyeder T zuordnen, das keine zwei inneren Punkte enthält, die bezüglich

[1] Die einfachsten Begriffe und Tatsachen der geometrischen Kristallographie sind hier als bekannt vorausgesetzt. Der Verf. orientierte sich verschiedentlich in der neueren und übersichtlichen Monographie von *J. J. Burckhardt*, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, 13 (Mineralogisch-geotechnische Reihe Bd. II), Basel 1947.

Γ äquivalent sind. T ist ein (abgeschlossener) *Fundamentalbereich* von Γ. Der Raum R läßt sich im Sinne der Elementargeometrie in abzählbar unendlich viele mit T Γ-gleiche Polyeder zerlegen; es gilt

$$R = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^{\alpha_\nu}, \tag{1}$$

wobei sich die Summation über die abgezählten Operationen α_ν der Gruppe Γ erstrecken soll. Hierbei sei α_0 die Identität.

Es sei $p \in R$ ein beliebiger Punkt. Die Punktmenge

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\alpha_\nu}, \tag{2}$$

also die Vereinigungsmenge aller aus p durch Anwendungen aller Operationen von Γ hervorgehenden Punkte, ist ein regelmäßiges Punktsystem. Wir nennen G das dem Punkt p assoziierte *Gitter*. Ist p Fixpunkt einer in Γ enthaltenen Drehuntergruppe der Ordnung j, so ist entsprechend der Bildung (2) jeder Punkt des Gitters G mit der Vielfachheit j zu zählen.

Ein Hauptergebnis der vorliegenden Note ist die Aufstellung eines Systems notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Γ-Zerlegungsgleichheit zweier eigentlicher Polyeder A und B. Die Kontrolle der Bedingungen basiert lediglich auf einer geeigneten Zählung der in A und B liegenden Gitterpunkte bei allen den Punkten des Fundamentalbereichs assoziierten Gittern.

Damit ist eine verhältnismäßig einfache Lösung des Problems der Γ-Zerlegungsgleichheit für kristallographische Gruppen erzielt, welche auch auf die Problemlage bei andern zugrunde gelegten Gruppen ein gewisses Licht wirft. Mit geringfügigen Modifikationen kann man auf analoge Weise bei beliebigen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen vorgehen.

Bei kontinuierlichen Gruppen liegen die Verhältnisse aber wieder völlig anders, und wie bekannt, konnten beispielsweise im Falle der vollen Bewegungsgruppe bis heute noch keine passenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder aufgefunden werden[2].

[2] Allgemein bekannt sind die von *M. Dehn* (Über den Rauminhalt, Math. Ann. 55, 465—478, 1902) aufgefundenen, sich auf den gewöhnlichen Raum beziehenden notwendigen Bedingungen. Die Frage, ob diese Bedingungen zusammen mit der selbstverständlichen Volumgleichheit der Polyeder für ihre Zerlegungsgleichheit auch ausreichen, ist bis heute noch nicht beantwortet worden.

II. Γ-invariante und additive Polyederfunktionale.

Es ist p ein beliebiger Punkt und A ein Polyeder. Wir definieren den *Grad ω der Zugehörigkeit* von p zu A durch den Ansatz

$$\omega = \omega(p; A) = \lim_{\varrho \to 0} J[K_\varrho(p)\, A] / J[K_\varrho(p)], \tag{3}$$

wobei $K_\varrho(p)$ eine Kugel vom Radius ϱ um p, $K_\varrho(p)\, A$ den Durchschnitt dieser Kugel mit dem Polyeder A und $J[P]$ den Inhalt des Körpers P bezeichnet. Man beachte, daß für genügend kleine ϱ der rechts stehende Quotient konstant ausfällt, so daß sich die Frage der Existenz des Grenzwertes trivial beantwortet. Ohne weiteres sieht man, daß

$$0 \leqq \omega(p; A) \leqq 1 \tag{4}$$

gilt. Für einen äußeren Punkt von A ist $\omega = 0$, für einen inneren Punkt ist dagegen $\omega = 1$. Für einen Randpunkt von A ergibt sich für ω ein Zwischenwert, der ein Maß für die Zugehörigkeit zu A darstellt.

Es sei jetzt G ein Gitter, wie es mit Ansatz (2) gebildet wurde; A bedeute ein eigentliches Polyeder. Wir definieren ein von G abhängiges *Polyederfunktional* durch

$$\varphi(A) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega(p^{a_\nu}; A). \tag{5}$$

Der mit (5) angesetzte Funktionalwert stellt im wesentlichen die Anzahl der im Polyeder A liegenden Punkte des Gitters G dar, wobei aber Randpunkte nach Maßgabe ihres Zugehörigkeitsgrades mitgezählt werden und Gitterpunkte, die Fixpunkte bezüglich einer Drehuntergruppe von Γ sind, entsprechend ihrer Vielfachheit zur Zählung beitragen.

Das Funktional $\varphi(A)$, das wir uns bei festem Gitter G für alle eigentlichen Polyeder A definiert denken, ist *Γ-invariant*, *additiv*, *definit* und *normiert*, d. h. es hat die nachfolgend formelmäßig ausgedrückten Eigenschaften:

$$\varphi(A) = \varphi(B), \text{ falls } A \simeq B \text{ ist;} \tag{6}$$

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \tag{7}$$

falls $A + B$ eine Zerlegung im Sinne der Elementargeometrie darstellt;

$$\varphi(A) \geqq 0; \tag{8}$$

$$\varphi(T) = 1, \tag{9}$$

wobei T einen (abgeschlossenen) polyedrischen Fundamentalbereich der Gruppe Γ bezeichnet.

Die Verifikation von (6), (7) und (8) ist so einfach, daß wir sie dem Leser überlassen können. Zum Nachweis von (9) gehen wir von einem Polyeder W aus, das aus n T-Polyedern zusammengesetzt ist, wie sie in (1) zum Aufbau des ganzen Raumes dienen und es bezeichne m die Anzahl derjenigen T-Polyeder von W, welche Randpunkte von W enthalten.

Da die Anzahl der in einem beschränkten Raumteil liegenden Gitterpunkte bei veränderlichem Gitter (Γ fest) beschränkt bleibt, gibt es jedenfalls eine Konstante C, so daß für alle Gitter $\varphi(T) \leqq C$ ausfällt. Betrachten wir neben dem ursprünglich der Konstruktion des Funktionals $\varphi(A)$ fest zugrunde gelegten Gitter G, das einem Punkt p assoziiert ist, ein zweites Gitter G^*, das dem Punkt p^* assoziiert sein möge, und bezeichnet $\varphi^*(A)$ das entsprechend konstruierte Funktional, so überlegt man sich leicht, daß $|\varphi(W) - \varphi^*(W)| \leqq mC$ gilt. Nach (6) und (7) schließt man $\varphi(W) = n\varphi(T)$. Wählt man jetzt für p^* einen inneren Punkt von T, so muß $\varphi^*(T) = 1$ und also $\varphi^*(W) = n$ sein. Mit der Abschätzung oben resultiert $|\varphi(T) - 1| \leqq (m/n)C$. Nun kann man aber m/n offensichtlich beliebig klein machen, indem man W in geeigneter Weise aufbaut. So ergibt sich (9).

Besondere einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn Γ eine reine Translationsgruppe ist. Die verschiedenen Gitter sind in diesem Fall gewöhnliche Punktgitter und fallen unter sich translationsgleich aus. Als Fundamentalbereich T kann ein Parallelotop gewählt werden. Mit T ist stets auch T^τ ein Fundamentalbereich, wo τ eine beliebige Translation, die nicht notwendig zu Γ gehören muß, bezeichnet.

In diesem speziellen, aber wichtigen Fall gilt offenbar

$$\varphi(T) = \varphi(T^\tau) = 1, \tag{10}$$

womit ausgedrückt ist, daß das Funktional $\varphi(A)$ für $A = T$ sogar *translationsinvariant* ausfällt.

III. Γ-zerlegungsgleiche Polyeder; Kriterium.

Wir stellen jetzt ein auf geeigneter Gitterpunktszählung beruhendes notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Γ-Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder auf. Es gilt der folgende

1. Satz: *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei eigentliche Polyeder A und B Γ-zerlegungsgleich sind, ist die Übereinstimmung der Werte*

$$\varphi(A) = \varphi(B) \tag{11}$$

für alle Funktionale φ, welche sich aus allen durch die Gruppe Γ erzeugten Gittern G gewinnen lassen.

Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung notwendig ist: Es sei also $A \sim B$, so daß zwei Zerlegungen $A = \Sigma A_i$ und $B = \Sigma B_i$ mit $A_i \simeq B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vorliegen. Nach (7) gilt $\varphi(A) = \Sigma \varphi(A_i)$ und ebenso auch $\varphi(B) = \Sigma \varphi(B_i)$. Nun ist nach (6) weiter $\varphi(A_i) = \varphi(B_i)$ und so ergibt sich (11) wzbw.

Nun beweisen wir, daß die Bedingung auch hinreicht: Im Hinblick auf (1) sind durch $A = \sum_{\nu=0}^{n} A T^{\alpha_\nu}$ und $B = \sum_{\mu=0}^{m} B T^{\beta_\mu}$ Zerlegungen von A und B in Teilpolyeder gegeben. Wir bilden jetzt das Polyeder

$$W = \sum_{\mu=0}^{m} [B T^{\beta_\mu}) \bar{\beta}_\mu]^{\alpha_n} = [\sum_{\mu=0}^{m} (B^{\bar{\beta}_\mu} T)]^{\alpha_n},$$

wobei $\bar{\beta}_\mu$ die zu β_μ inverse Operation bezeichnet, und das Summenzeichen hier die Bildung der Vereinigungsmenge anzeigt. Unmittelbar ist $W \subset T^{\alpha_n}$ ablesbar. Wir zeigen, daß ferner $A T^{\alpha_n} \subset W$ gilt. In der Tat: Es sei $p \in T$ so gewählt, daß $p^{\alpha_n} \in A T^{\alpha_n}$ ausfällt. Ist G das p assoziierte Gitter, so ist wegen $p^{\alpha_n} \in A$ offenbar $\varphi(A) > 0$, wobei das Funktional φ sich auf Grund des Gitters G nach Ansatz (5) gewinnen läßt. Nach (11) folgt, daß auch $\varphi(B) > 0$ sein muß. Es gibt demnach ein $\gamma \in \Gamma$, so daß $p^\gamma \in B$ oder also auch $p^\gamma \in B T^\gamma$ gilt. Da $B T^\gamma$ nicht leer ist, muß γ eine der Operationen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ sein, so daß wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\gamma = \beta_m$ sei. Es gilt also $p^{\beta_m} \in B T^{\beta_m}$ oder auch $p^{\alpha_n} \in [(B T^{\beta_m}) \bar{\beta}_m]^{\alpha_n}$, oder schließlich $p^{\alpha_n} \in W$, womit die oben aufgestellte Hilfsbehauptung erwiesen ist. Nach Konstruktion ist aber das Polyeder W mit einem Teilpolyeder von B Γ-zerlegungsgleich. Das nämliche gilt demnach auch für $A T^{\alpha_n}$; setzen wir $A T^{\alpha_n} = U_n$, so notieren wir $V_n \sim U_n$ mit $V_n \subset B$. Betrachten wir jetzt die Restpolyeder $A_1 = A - U_n$ und $B_1 = B - V_n$, so gelten die neuen Zerlegungen $A_1 = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_1 T^{\alpha_\nu}$ und $B_1 = \sum_{\mu=0}^{m} B_1 T^{\beta_\mu}$, wobei die Teilpolyederzahl links um 1 reduziert ist. Nun bemerkt man leicht, daß sich die Ausgangssituation bezüglich A_1 und B_1 wieder hergestellt hat, insofern als die Bedingung (11) wieder erfüllt sein muß. Führen wir den angefangenen Reduktionsprozeß in analoger Weise weiter, so gelangen wir zu der folgenden Sachlage: Mit $A T^{\alpha_i} = U_i$ gilt $U_i \sim V_i$ und $V_i \subset B$. Zwei absteigende Polyederfolgen $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ und $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ sind durch die Ansätze $A_{i+1} = A_i - U_{n-1}$

und $B_{i+1} = B_i - V_{n-1}$ definiert, und für jedes Paar A_i und B_i ist die Bedingung (11) erfüllt. Da jetzt aber A_{n+1} offensichtlich leer wird, muß das nämliche auch für B_{n+1} gelten. So ergibt sich $A = \sum_0^n U_i$ und $B = \sum_0^n V_i$, wo das Summenzeichen wieder eine Zerlegung andeutet. Mit $U_i \sim V_i$ folgt so $A \sim B$ wzbw.

IV. Γ-ergänzungsgleiche Polyeder.

Zwei eigentliche Polyeder A und B wollen wir Γ-ergänzungsgleich nennen, wenn sich durch Hinzufügung zweier geeigneter Γ-zerlegungsgleicher Polyeder C und D zwei Γ-zerlegungsgleiche Polyeder gewinnen lassen, so daß also $C \sim D$ und $A + C \sim B + D$ gilt.

Als Korollar zum Hauptergebnis des vorstehenden Abschnitts ergibt sich nun leicht der folgende

2. Satz: *Zwei eigentliche Γ-ergänzungsgleiche Polyeder A und B sind Γ-zerlegungsgleich.*

In der Tat: Aus $C \sim D$ und $A + C \sim B + D$ ergibt sich nach (11) zunächst $\varphi(C) = \varphi(D)$ und $\varphi(A + C) = \varphi(B + D)$ und mit Rücksicht auf (7) folgt unmittelbar $\varphi(A) = \varphi(B)$ und erneut nach (11) schließlich $A \sim B$ wzbw.

Damit hat sich der Satz von der Zerlegungsgleichheit ergänzungsgleicher Polyeder auch in der hier vorliegenden Variante, d. h. bei Zugrundelegung diskontinuierlicher Bewegungsgruppen bestätigt[3].

V. Besondere Zerlegungssätze.

Wir erklären zunächst eine zweckmäßige abkürzende Bezeichnungsweise. Ist r eine natürliche Zahl, so soll $r.A$ ein Polyeder bezeichnen, das sich in r Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A Γ-gleich sind, so daß also $r.A = \sum_1^r A_i$ und $A_i \simeq A$ gilt.

Wir formulieren jetzt den folgenden

3. Satz: *Sind T und T_0 Fundamentalbereiche der Gruppen Γ und Γ_0, wobei Γ_0 eine Untergruppe von Γ vom (endlichen) Index r ist, so besteht eine Γ_0-Zerlegungsgleichheit $T_0 \sim r\,.\,T$.*

[3] Für Bewegungsgruppen, welche die Translationsgruppe als Normalteiler enthalten, also insbesondere auch für die volle Bewegungsgruppe konnte der fragliche Satz kürzlich allgemein bewiesen werden. Vgl. *H. Hadwiger*, Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder; Math. Z. **55**, 292—298, 1952.

Zum Nachweis betrachten wir das Polyeder $r \,.\, T = T^{\tau_1} + T^{\tau_2} + \ldots + T^{\tau_r}$, wobei die Gruppenelemente τ_i einer Zerlegung $\Gamma = \tau_1 \Gamma_0 + \tau_2 \Gamma_0 + \ldots + \tau_r \Gamma_0$ der Gruppe Γ nach den sogenannten Nebengruppen von Γ_0 entnommen werden sollen. Wie man leicht erkennen kann, ist $r \,.\, T$ ein Fundamentalbereich der Gruppe Γ_0. Nach (9) hat man demnach $\varphi_0 (r \,.\, T) = 1$, wo φ_0 ein sich auf Γ_0 beziehendes Funktional bezeichnet. Da aber auch $\varphi_0 (T_0) = 1$ ist, ergibt sich nach (11) $r \,.\, T \sim T_0$ bezüglich Γ_0 (also erst recht auch bezüglich Γ) wzbw.

Von den zahlreichen Anwendungen und Spezialisierungen, welche der oben ausgesprochene Satz erlaubt, soll ein besonders instruktiver Fall herausgegriffen werden:

Es sei Γ eine reine Translationsgruppe und G das durch Γ erzeugte Gitter. Ein beliebiges Gitterparallelotop T_i ist Fundamentalbereich einer Untergruppe Γ_i von Γ von endlichem Index r_i. Wählen wir zwei verschiedene Gitterparallelotope T_0 und T_1, so folgert man eine Γ-Zerlegungsgleichheit der Form $r_1 \,.\, T_0 \sim r_0 \,.\, T_1$. Insbesondere sind offenbar volumgleiche Gitterparallelotope stets Γ-zerlegungsgleich.

VI. Gitterpunktszählung und Volumen; Formel von N. Hofreiter.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf reine Translationsgruppen Γ. Es ist bekannt, daß zwischen dem Volumen $V(A)$ eines Polyeders A und der Anzahl der in A liegenden Punkte eines durch Γ erzeugten Gitters verschiedene Bindungen bestehen. Bezeichnet $V(T)$ das Volumen eines Fundamentalparallelotops T des Gitters, so ist der über alle Translationen des Polyeders A sich erstreckende Mittelwert der erwähnten Gitterpunktsanzahl gleich dem Volumverhältnis $V(A)/V(T)$.

In gewissen Fällen, wo zwischen dem Polyeder A und dem Gitter eine besonders enge Verwandtschaft besteht, kann dieses Volumverhältnis aber durch eine einzige Zählung gewonnen werden. Von solchen Möglichkeiten handelt der folgende

4. Satz: *Es sei Γ eine reine Translationsgruppe. Wenn für ein eigentliches Polyeder A das sich auf Grund des durch Γ erzeugten Gitters G ergebende Funktional $\varphi(A)$ translationsinvariant ausfällt, so daß für jede Translation τ $\varphi(A^\tau) = r$ (konstant) ist, so ist r eine natürliche Zahl und es besteht eine Γ-Zerlegungsgleichheit der Form $A \sim r \,.\, T$, wo T ein Fundamentalparallelotop von Γ ist. Offenbar gilt dann die Volumrelation $V(A) = rV(T)$.*

In der Tat: Da alle durch Γ erzeugten Gitter translationsgleich sind, folgt aus der vorausgesetzten Invarianz von $\varphi(A)$, daß $\varphi(A) = r$ für alle Funktionale der von uns betrachteten Art sein wird. Betrachten wir insbesondere einen Fall, wo alle Gitterpunkte entweder äußere oder innere Punkte von A sind, so resultiert, daß r eine natürliche Zahl ist. Da aber andererseits wegen (7) und (9) auch $\varphi(r \,.\, T) = r$ gilt, folgt mit (11) $A \sim r \,.\, T$ wzbw.

Man wird sich fragen, wie man zu Polyedern gelangen kann, welche die im 4. Satz genannte Voraussetzung erfüllen.

Aus den Ergebnissen des vorstehenden Abschnitts folgt beispielsweise, daß jeder (polyedrische) Fundamentalbereich einer Untergruppe von Γ von endlichem Index r ein derartiges Polyeder darstellt. Insbesondere gilt dies für ein beliebiges Gitterparallelotop.

Es sei A ein derartiges Gitterparallelotop. In diesem Fall läßt sich der nach Ansatz (5) aufgestellte Funktionalwert $\varphi(A)$ durch die Gitterpunktanzahlen im Innern, auf den Seitenflächen und in den Kanten von A ausdrücken.

Ist nämlich p ein Gitterpunkt in einer i-dimensionalen Kante von A, so gehört p zu einer Menge von 2^{k-i} Gitterpunkten, die alle in parallelen Kanten liegen, und für welche die Summe $\Sigma\,\omega(p; A)$ der Zugehörigkeitsgrade $= 1$ ist. Der Beitrag, den die im Innern von i-dimensionalen Kanten von A liegenden Gitterpunkte — ihre Anzahl sei N_i — zur Summe in (5) liefern, ist demnach durch $2^{i-k} N_i$ gegeben. So erzielen wir das sich auf ein Gitterparallelotop A beziehende Ergebnis

$$\varphi(A) = \sum_{i=0}^{k} 2^{i-k} N_i, \tag{12}$$

wonach das Funktional φ durch die Anzahlen N_i der im Innern der i-dimensionalen Kanten von A liegenden Gitterpunkte ausgedrückt wird. N_k bezeichnet die Anzahl der sich im Innern von A befindenden Gitterpunkte; offenbar ist $N_0 = 2^k =$ Anzahl der Eckpunkte von A.

Wird nun A im Gitter verschoben, so bleibt der Wert $\varphi(A)$ des Funktionals invariant, wobei die Darstellung (5) offenbar stets gültig bleibt.

Mit Rücksicht auf Satz 4 ergibt sich so eine von *N. Hofreiter*[4] aufgestellte Formel, welche in trefflicher Weise die enge Beziehung zwischen

[4] *N. Hofreiter*, Zur Geometrie der Zahlen, Monatshefte für Math. u. Physik, **40**, 181–192, 1933. Die fragliche Formel tritt dort als Hilfssatz auf. Besonders hervorgehoben wurde sie dann am II. Österreichischen Mathematiker-Kongreß 1949 mit dem Beitrag von *N. Hofreiter:* „Über den Zusammenhang zwischen Inhalt und Gitterpunktsverteilung".

Volumen und Gitterpunktsanzahl beleuchtet, nämlich die Beziehung

$$V(A)/V(T) = \sum_{i=0}^{k} 2^{i-k} N_i. \tag{13}$$

Buchbesprechungen.

Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Von *L. Schläfli.* Band II. 381 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1953.

Von der auf drei Bände berechneten Ausgabe (vgl. die Besprechung von Bd. I in Mh. Bd. 54, S. 157 (1950)) liegt nunmehr der zweite Band vor. Er enthält neben einer Reihe kleinerer Abhandlungen vermischten Inhalts zunächst die große Arbeit zur Eliminationstheorie, die 1852 in den Denkschriften der Wiener Akademie veröffentlicht wurde, ferner die beiden wichtigen Abhandlungen zur Theorie der Flächen 3. Ordnung, deren erste sich mit den 27 Geraden auf einer solchen Fläche beschäftigt und die Entdeckung der Doppelsechs enthält, während die zweite die projektive Einteilung in 22 Klassen zum Gegenstand hat. Eine Anzahl Arbeiten besteht ferner aus Teilbearbeitungen der (in Bd. I abgedruckten) „Theorie der vielfachen Kontinuität", deren Erscheinen ja erst nach Schläflis Tod erfolgte.

Die wertvollen Bemerkungen, die *J. J. Burckhardt, H. Hadwiger, L. Kollros* und *B. L. van der Waerden* den wichtigeren Abhandlungen des Bandes beigegeben haben, verdienen besonders hervorgehoben zu werden, da sie sowohl nach der sachlichen wie der historischen Seite den Abdruck der Abhandlungstexte in wünschenswerter Weise ergänzen. *J. Radon,* Wien

Abstract Set Theory. Von *A. A. Fraenkel.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XII, 479 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1953. hfl. 38.—.

Der mit der „Einleitung in die Mengenlehre" vertraute Leser desselben Autors, welche 1928 zum dritten Male aufgelegt wurde, wird sich mit dem nun erschienenen Werk rasch befreunden. Die Patenschaft des früheren für das jetzige Buch ist unverkennbar, schon in der äußeren Anlage. Die ersten drei Kapitel der „Einleitung" sind hier in wesentlich erweiterter und modernisierter Gestalt dargeboten. Die beiden restlichen Kapitel der „Einleitung" werden wahrscheinlich in dem vom Autor geplanten Werk „Foundations of Set Theory" berücksichtigt werden. Der Verf. gibt zunächst die Mengendefinition von *Cantor,* arbeitet jedoch dann gewisse Prinzipien heraus, die im wesentlichen die Axiome von *Zermelo* darstellen, so daß der Leser schon jetzt eine Vorstellung von der axiomatischen Durchdringung der Mengenlehre bekommt. Anderseits wird jedes starre Festhalten an diesen Prinzipien vermieden, womit einem ungehemmten Aufbau der Disziplin nichts im Wege steht. Es sei bemerkt, daß diesen „halbaxiomatischen" Weg auch ein anderer Meister der Mengentheorie beschritten hat, und zwar *Sierpinski* in „Algèbre des ensembles", Warschau, 1951. Übrigens scheint sich dieses Werk in der Bibliographie nicht vorzufinden, doch sei gleich hier gesagt, daß das beigefügte Literaturverzeichnis, auf den neuesten Stand gebracht, das umfassendste (127 S.!) seiner Art sein dürfte. An neuen Dingen gegenüber dem deutschsprachigen Werk des Autors sei insbesondere hervorgehoben der breitere Ausbau der Operationen mit den Alephs. Die Ungleichung von *König-Zermelo* ist jetzt mit Beweis versehen und das hervorragende Resultat von *Gödel* über die Verträglichkeit der Kontinuumshypothese mit den Axiomen

der Mengenlehre ist erwähnt und eine Analyse des Verhältnisses zwischen diesem Satz und dem Beweis der Hypothese für die „Foundations" versprochen. Der Äquivalenzsatz von *Bernstein* ist mit dem weitertragenden Beweis von *Banach* dargestellt. — Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, daß die Darstellung leicht und flüssig lesbar ist. *L. Schmetterer*, Wien

Inhalt und Maß. Von *K. Mayrhofer*. Mit 17 Figuren, VIII, 269 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. S 180.—, geb. S 195.—; sfr. 37.—, geb. sfr. 40.—; $ 8.60, geb. $ 9.30; DM 36.—, geb. DM 39.—.

Die zunächst für Punktmengen entwickelte allgemeine Maßtheorie wurde von ihrem Schöpfer *Carathéodory* schließlich „algebraisiert", indem anstelle der Punktmengen die Elemente (Somen) eines *Boole*schen σ-Verbandes traten, womit die Maßtheorie zur Theorie additiver Somenfunktionen wird.

In deutscher Sprache gab es bisher keine zusammenfassende Darstellung dieses Fragenkomplexes und auch das aus dem Nachlaß *Carathéodorys* seit langem in Aussicht stehende Werk ist bis heute nicht erschienen. Es ist daher besonders zu begrüßen, daß ein gründlicher Kenner der Materie sich der Mühe unterzogen hat, die Inhalts- und Maßtheorie in einem Lehrbuch mäßigen Umfangs vorzutragen.

Der Verf. entwickelt im 1. Kapitel zunächst eine allgemeine Inhalts- und Maßtheorie für abstrakte Mengen, wobei u. a. die für die Integrationstheorie wichtigen Produktinhalte ausführliche Behandlung finden. Dann wendet er sich dem euklidischen R_n zu und betrachtet im 2. Kapitel als Anwendung seiner allgemeinen Theorie den Inhaltsbegriff nach *Jordan*, im 3. Kapitel die Maßbegriffe von *Borel* und *Lebesgue*. Der Überdeckungssatz von *Vitali* sowie der Dichtebegriff finden hier die gebührende Beachtung. Im 4. Kapitel wird das Verhalten der in den beiden vorangehenden Kapiteln eingeführten Begriffe bei linearen, insbesondere orthogonalen Transformationen dargestellt und als Anwendung die Inhaltsbestimmung der einfachsten Gebilde des R_n durchgeführt. Auch der allgemeine Begriff der meßbaren Abbildung wird kurz berührt.

Die beiden letzten Kapitel sind dem Aufbau der Theorie nach *Carathéodory* gewidmet. Kapitel 5 bringt die Theorie der äußeren und inneren Maße nach *Carathéodory* bzw. *Rosenthal* und ordnet sie in die allgemeine Theorie von Kapitel 1 ein, wobei z. B. die „gewöhnlichen" äußeren Maße als die „Außenfunktionen" beliebiger Maße erscheinen. Das 6. Kapitel bringt die Theorie der *Boole*schen Verbände und die Somentheorie, die sich nach den allgemeinen Erörterungen aus der Verbandstheorie sehr rasch dadurch erledigt, daß der Verf. seine früheren Entwicklungen so geführt hat, daß sie sich ohne weiteres auf den neuen Standpunkt anwenden lassen. Als Anhang hat der Verf. einen Abriß der Theorie der *Borel*schen Mengen beigegeben, der für das tiefere Verständnis der Entwicklungen des 3. Kapitels über das *Borel*sche Maß eine wünschenswerte Ergänzung darstellt.

Es ist klar, daß bei einer solchen systematischen Gesamtdarstellung gegenüber der Behandlung von Einzelfragen mancher Weg sich verkürzt und manches neue Licht auf die Theorie fällt. Der aufmerksame Leser wird dies an vielen Stellen des Buches bestätigt finden. Er wird auch bedauern, daß, wohl aus Rücksicht auf den Umfang des Buches, der Integralbegriff mit keinem Worte erwähnt und außer den klassischen Inhalts- und Maßbegriffen keine weiteren Anwendungen der allgemeinen Theorie berührt werden. Vielleicht ist es dem Verf. möglich, diesen Wünschen bei anderer Gelegenheit gerecht zu werden.

J. Radon, Wien

Einführung in die höhere Mathematik. Vorlesungen an der Universität Berlin (1920—1934) von *G. Feigl* †, bearbeitet und herausgegeben von *H. Rohrbach*. Mit 19 Textabb., VIII, 375 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 26.80.

G. Feigl hielt jedes Semester von 1920 bis 1934 in Berlin eine Vorlesung über „Einführung in die höhere Mathematik". Sie sollte den Studierenden den Übergang vom Schulunterricht zum Hochschulstudium erleichtern, was *G. Feigl* dank seiner hervorragenden pädagogischen Fähigkeit gelang. Andererseits sollte die Vorlesung die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Algebra und Analytische Geometrie entlasten. Das Buch ist in methodischer Hinsicht ein Meisterwerk und daher Studenten sehr zu empfehlen. Inhaltlich bringt es viel mehr als man aus dem Titel erwartet. Es sind dies: Vektoren, Determinanten, Polynome, rationale Funktionen, Systeme von linearen Gleichungen, Matrizen, Permutationsgruppen, Grundbegriffe der Mengenlehre, Zahlbegriff (ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen). Wie viel Mühe *H. Rohrbach* als Herausgeber der Vorlesungen hatte, läßt sich nicht ersehen. Doch gebührt sicher auch ihm besonderer Dank. *N. Hofreiter*, Wien

General College Mathematics. Von *W. L. Ayres, C. G. Fry, H. F. S. Jonah*. 283 S. New York: McGraw-Hill Book Company. 1952. $ 3.75.

Das vorliegende Buch wurde von den Verfassern für Studenten der Biologie sowie aller derjenigen Studienrichtungen, welche Mathematik nur im Rahmen eines einjährigen Kurses studieren wollen, geschrieben. Es wird gezeigt, wie man empirische Beobachtungen vorteilhaft graphisch darstellt, der Funktionsbegriff, Proportionen, lineare und quadratische Gleichungen werden dem Leser in einfacher Darstellung dargebracht. Ausführlich sind die wichtigsten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen dargestellt, Zinseszinsrechnung, Exponentielle und Logarithmus folgen in den nächsten Kapiteln. Einige Abschnitte sind der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik gewidmet.; letzteres Gebiet enthält sogar einiges über Stichproben. Die Differential- und Integralrechnung wurde nicht behandelt. Im letzten Teil des Buches soll der Leser mit ungelösten Problemen und neueren Arbeitsgebieten der Mathematik bekannt gemacht werden (Zahlentheorie: Fermat'scher Satz, Goldbach'sche Vermutung, Vollkommene Zahlen, Topologie: Vier-Farben-Problem, Königsberger Brücken, Einiges über das logische Denken). Das Buch enthält zahlreiche Beispiele und auch viele Aufgaben, die nur zur Unterhaltung des Lesers gedacht sind. *E. Höfinger*, Wien

Complex Analysis. Von *L. Ahlfors*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) XI, 241 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1953. $ 5.—.

Das vorliegende Werk des bekannten Forschers soll eine nicht allzu lange, strenge, aber trotzdem gut lesbare Einführung in die Funktionentheorie bieten und soll auch dem Lehrenden Anregungen geben. Man kann wohl sagen, daß es dem Verfasser in idealer Weise gelungen ist, diesen Erfordernissen gerecht zu werden. Wir geben eine kurze Inhaltsangabe: In Kapitel eins finden wir die Einführung der komplexen Zahlen, ihre geometrische Deutung, sowie die linear gebrochenen Transformationen. Kapitel 2 dient der Erläuterung des Begriffes der analytischen Funktion und der Abbildungen durch einfache Funktionen, sowie einfacher Riemannscher Flächen. Das nächste Kapitel, mit „Komplexe Integration" überschrieben, bringt eine ausgezeichnete Darstellung des *Cauchy*-schen Integralsatzes und verwandter Sätze, wobei von den Bezeichnungen der

Homologietheorie vorteilhaft Gebrauch gemacht wird. Erst Kapitel 4 bringt die Potenzreihen. Hier finden sich auch weitere unendliche Prozesse, die analytische Funktionen liefern, wie der *Weierstraß*sche Produktsatz, Partialbruchreihen und verschiedene Anwendungen. Der *Riemann*sche Abbildungssatz wird unter Verwendung des Begriffes der normalen Familie bewiesen. Ein Kernstück des Buches ist das folgende Kapitel, welches das *Dirichlet*sche Problem mit Hilfe der subharmonischen Funktionen behandelt, eine Methode, die von *O. Perron* stammt. Hier wird auch die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche diskutiert. Das letzte Kapitel ist dem Begriff der mehrdeutigen Funktion und ihrer *Riemann*schen Fläche gewidmet. Die einfachsten Eigenschaften der algebraischen Funktionen werden erläutert und den Abschluß bildet eine funktionentheoretische Behandlung der linearen Differentialgleichungen, insbesondere der hypergeometrischen Differentialgleichung. Hier — und überhaupt in vielen Teilen des Buches — werden die Gedanken von *Riemann* besonders schön zum Ausdruck gebracht.

Zahlreiche Aufgaben erleichtern dem Leser die Aneignung des Stoffes. Das Schönste an dem Buch ist aber die klare und natürliche Art, mit der der Verfasser es versteht, auch die kleinsten Einzelheiten zu motivieren und restlos verständlich zu machen. *K. Prachar*, Wien

Funzioni Abeliane modulari. Von *F. Conforto*. Band I: Preliminari e parte gruppale. — Geometria simplettica. 454 S. Roma: Docet, Edizioni Universitarie. 1951.

Seinen vor zehn Jahren erschienenen Vorlesungen über *Abel*sche Funktionen und *Riemann*sche Matrizen, die nächstens neu bearbeitet in deutscher Sprache erscheinen sollen, läßt der bestbekannte Verf. nun einen neuen Zyklus von Vorlesungen „Über Abelsche Modulfunktionen" folgen, der zum ersten Mal in ein fast unerschlossenes Gebiet führt. Es handelt sich hier um die Verallgemeinerung der klassischen (elliptischen) Modulfunktionen und der automorphen Funktionen von mehr Variablen. Ausgangspunkt bilden die *Riemann*schen Matrizen (RM), das sind Matrizen von p-Zeilen und $2p$-Spalten, die noch einige zusätzliche Bedingungen erfüllen; jeder RM entspricht ein Körper *Abel*scher Funktionen, d. s. meromorphe Funktionen von p-Variablen, welche die in der RM enthaltenen Spalten als Fundamentalperioden besitzen. Diese Zuordnung ist aber nicht umkehrbar eindeutig, vielmehr entspricht einem und demselben *Abel*schen Funktionenkörper eine ganze Klasse von „äquivalenten" RM, die aus irgendeiner von ihnen durch Multiplikation mit einer beliebigen nichtsingulären Matrix linksseitig, und einer ganzzahligen unimodularen Matrix rechtsseitig hervorgehen. Das fundamentale Problem besteht also darin, ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen der RM aufzustellen; damit ist dann auch die Aufgabe, die *Abel*schen Funktionenkörper und die damit zusammenhängenden *Picard*schen Mannigfaltigkeiten erschöpfend zu klassifizieren, gelöst.

Zunächst wird nun gezeigt, daß jede RM sich auf eine gewisse äquivalente Normalform bringen läßt, die dadurch ausgezeichnet ist, daß die p ersten Spalten die Inverse einer ganzzahligen quadratischen Diagonalmatrix Δ bilden, deren Diagonalelemente den Typus von Elementarteilern haben, während die p letzten Spalten eine symmetrische Matrix mit positiv definiten Imaginärteil bilden. Im allgemeinen ist Δ durch die Äquivalenzklasse eindeutig bestimmt, wenn es auch Ausnahmen, sogenannte „singuläre" RM gibt, die Normalformen mit verschiedenen Δ besitzen, und diese sogar in dem Bildbereich R der RM mit einem festen Δ überall dicht liegen. Aber auch im allgemeinen Fall gibt es in jeder

Äquivalenzklasse noch unendlich viele Normalformen mit *demselben* Δ; eine eingehende Untersuchung zeigt, daß sie einer Gruppe von $2p$-reihigen Matrizen entsprechen, die nach *C. L. Siegel* die „symplektische Gruppe" heißt, und deren ganzzahlige Untergruppen die eigentlichen Modulgruppen bilden. Im Repräsentationsraum R der RM wird nun eine Metrik eingeführt, bei der die Operationen der symplektischen Gruppe als Bewegungen gedeutet werden können. Und nun wird mit sehr interessanten Überlegungen, die bereits bei den gewöhnlichen elliptischen Modulfunktionen ihr Vorbild finden, die Existenz eines *Fundamentalbereiches* R* innerhalb R aufgezeigt; in R* besitzt jede RM mit festem Δ eine und nur eine äquivalente, so daß R* tatsächlich ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen der RM bildet.

Die Ausarbeitung und Darstellung beruht zu einem beträchtlichen Teil auf eigenen Forschungsarbeiten des Verf. und ist trotz dem schwierigen und verwickelten Stoff äußerst klar und lückenlos, so daß man dem Verf. zu diesem wohlgelungenen Werk, das einen wesentlichen Fortschritt unserer Wissenschaft enthält, bestens beglückwünschen und der Hoffnung Ausdruck geben darf, daß die geplante Fortsetzung und Vollendung möglichst bald folgen möge.

W. Gröbner, Innsbruck

Differential Equations. Von *R. C. Yates*. VI, 215 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1952.

Das Buch ist als erste Einführung in das praktische Arbeiten mit Differentialgleichungen gedacht. Es beschränkt sich daher im wesentlichen auf einfachere Teile dieses Gebietes, bringt diese dafür aber mit großer Ausführlichkeit. Da es sich in erster Linie an diejenigen wendet, die mit den Anwendungen vertraut werden wollen, sind sehr zahlreiche Beispiele samt Lösungen beigegeben. Diese Beispiele sind durchweg von sehr einfacher Art und daher zur Übung besonders geeignet. Der Großteil des Buches handelt von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Nachdem in einem Abschnitt die Fourierreihen besprochen werden, wird als Beispiel einer partiellen Differentialgleichung die Wellengleichung behandelt.

Das Buch zeichnet sich durch eine gewissen frischen Stil aus und ist in sehr voraussetzungsloser Form abgefaßt. Es wird sicherlich viel dazu beitragen, die Scheu zu beseitigen, die manche Studenten, insbesondere der Technik, auch heute noch vor den Differentialgleichungen empfinden. *K. Prachar*, Wien

Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen. Von *I. G. Petrovskij*. 100 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1953. Geb. DM 7.80.

Die Theorie der Integralgleichungen hat schon sehr zahlreiche Darstellungen gefunden. Die meisten deutschsprachigen Darstellungen sind aber derzeit vergriffen und es ist also zu begrüßen, wenn dieses Büchlein nunmehr eine leicht lesbare und gründliche Einführung in diese Disziplin bietet. Im ersten Kapitel werden die *Fredholm*'schen Sätze behandelt, und zwar für verschiedene Voraussetzungen über den Kern der Integralgleichung. Das zweite Kapitel bringt eine kurze Darstellung der *Volterra*schen Integralgleichungen. Kapitel drei beschäftigt sich mit den Gleichungen mit symmetrischem Kern und mit den Entwicklungssätzen. Hier findet sich auch der Satz von *Mercer* über die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung des Kernes. Ein Anhang bringt die Hauptachsentransformation quadratischer Formen und einiges über Integralgleichungen, deren Kern nur als quadratisch integrierbar im *Lebesgue*schen Sinne vorausgesetzt wird.

Das Buch ist fast ohne Vorkenntnisse lesbar. Nur in dem letztgenannten Abschnitt wird die Theorie des *Lebesgue*-Integrals vorausgesetzt. Einfache Beispiele sorgen für eine Erleichterung des Verständnisses. Man kann das Buch jedem empfehlen, der eine klare Einführung in die Theorie der Integralgleichungen wünscht. *K. Prachar*, Wien

Die konfluente hypergeometrische Funktion. Von *H. Buchholz*. („Ergebnisse der angewandten Mathematik": 2. Heft.) Mit 9 Textabb., XVI, 234 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 36.—.

Der Verfasser hat sich der mühevollen und keineswegs leichten Aufgabe unterzogen, die umfangreiche und weit zerstreute Literatur über das theoretisch und praktisch wichtige Gebiet so zu verarbeiten, daß alle wesentlichen Ergebnisse in einem Buch mäßigen Umfangs in übersichtlicher Anordnung zur Darstellung kommen. Dafür werden ihm alle, für deren Arbeitsgebiet die Funktionen von *Kummer* und *Whittaker* von Bedeutung sind, nicht genug dankbar sein können.

Die Darstellung beginnt naturgemäß mit der *Kummer*schen Differentialgleichung, geht dann aber sofort zu *Whittakers* Gleichung über. Ihre Lösungen werden, abgesehen von einer sich als praktisch erweisenden kleinen Änderung (Division durch eine Γ-Funktion bei M) mit den *Whittaker*schen Symbolen bezeichnet. Als wichtigste Anwendung werden dann die Funktionen des Drehparaboloids sowie des parabolischen Zylinders im Zusammenhang mit der Wellengleichung betrachtet. Dann folgt die allgemeine Behandlung der Integraldarstellungen, anschließend das Studium des asymptotischen Verhaltens. Unbestimmte und bestimmte Integrale (einschließlich der Transformationen von *Laplace* und *Mellin*) und einige unendliche Reihen werden im nächsten Abschnitt behandelt, hierauf die Polynome von *Laguerre* und *Hermite* sowie einige weitere Sonderfälle besprochen. Sehr allgemeine, hauptsächlich auf *A. Erdelyi* zurückgehende Reihensummierungen bilden die einheitliche Grundlage der für die Anwendungen besonders wichtigen Integraldarstellung verschiedener Wellentypen in den Koordinaten des Drehparaboloids bzw. des elliptischen Zylinders; diese Zusammenfassung sonst auf verschiedenen Wegen gewonnener Einzelergebnisse ist ein Verdienst des Verf. Der letzte Abschnitt behandelt Nullstellen- und Eigenwertprobleme und als Anhang sind die wichtigsten Sonderfälle übersichtlich zusammengestellt. Hier findet man auch Hinweise auf das noch spärliche Tafelmaterial. Ein Literaturverzeichnis, das 161 Autoren aufzählt, sowie ein ausführliches Sachregister bildet den Schluß des inhaltsreichen Heftes, das nicht nur Resultate zusammenfaßt, sondern sie zu organischem Zusammenhang verknüpft und dem Leser auch die Beweise in kurzer Darstellung vorführt, oder, wenn dies nicht angängig ist, wenigstens die Beweismethode unter Hinweis auf die betreffende Literatur andeutet. *J. Radon*, Wien

Numerical Analysis. Von *D. R. Hartree*. Mit 30 Textabb., XIV, 287 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1952. 30 s. net.

Das Buch setzt vom Leser nur wenige Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung, der Algebra und der Theorie der Differentialgleichungen voraus. Es kann daher schon von Hochschülern gelesen werden, die nur ein paar Semester haben. Gar nichts wird aus der numerischen Analysis vorausgesetzt. Es wird gezeigt, was man darunter versteht und mit welchen Problemen man sich hier befaßt. Es wird ersichtlich, wie sehr verschieden diese von denen der reinen Mathematik sind. Während es hier oft darauf ankommt, eine Formel

zu erhalten, muß in der praktischen Analysis gezeigt werden, wie man die Formel tatsächlich berechnet. Dabei treten oft eigenartige Schwierigkeiten auf, deren Überwindung ganz der praktischen Analysis vorbehalten sind. Zu den Aufgaben der numerischen Analysis gehört ferner: das Aufstellen von Tafeln von Funktionen, dann die Interpolation, insbesondere die lineare. Aber auch für die nichtlineare Interpolation werden mehrere bewährte Formeln aufgestellt. Die Bedeutung der Differenzen von Funktionen wird klar ersichtlich. Als weitere Probleme treten auf: die numerische Integration (Quadratur) und die numerische Differentiation, die praktische Auflösung von linearen Gleichungssystemen, die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix, die Bildung der inversen Matrix; die numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen höheren Grades, die harmonische Analyse, die Auflösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen usw. Zwei Kapitel handeln von Rechenmaschinen, die zu den wichtigsten Hilfsmitteln der numerischen Analysis gehören. In dem einen Kapitel ist von den gewöhnlichen Additions- und Multiplikationsmaschinen die Rede, während das zweite von den automatischen Rechenmaschinen handelt, die in den letzten 15 Jahren sehr große Bedeutung erlangt haben. — Das Buch ist sehr leicht verständlich geschrieben und mit vielen Beispielen versehen. Es bringt eine große Anzahl von Methoden, die sich in der numerischen Analysis bewährt haben. Besonders wertvoll sind die Hinweise über die Vor- und Nachteile, die die einzelnen Methoden für die numerische Berechnung haben. Es wird auf die Gefahren hingewiesen, die auftreten können. Es wird gezeigt, wo Fehlerquellen, und wie die Fehler behoben werden können. Die Notwendigkeit der Kontrollrechnungen wird besonders hervorgehoben. Es wird gezeigt, wie man nicht rechnen soll. Aus dem Buch spricht die reiche persönliche Erfahrung, die der Autor in mehr als 35 Jahren erlangt hat und die er nun dankenswerter Weise in einem Lehrbuch an einen großen Leserkreis weitergibt.

N. Hofreiter, Wien

Theory and Applications of Distance Geometry. Von *L. M. Blumenthal*. XI, 347 S. Oxford: Clarendon Press. 1953.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die durch *K. Mengers* Untersuchungen begründete, seither in zahlreichen Arbeiten weiterentwickelte Geometrie in metrischen Räumen zusammenfassend darzustellen. Dabei ist im Sinn von *F. Klein* unter Geometrie die Invariantentheorie der Gruppe isometrischer Transformationen zu verstehen.

Nach einem einleitenden Kapitel über metrische Räume werden zunächst der Streckenbegriff, die Konvexität und die Kurventheorie behandelt. Besondere Sorgfalt widmet der Verf. den verschiedenen Möglichkeiten der Definition der Krümmung und streift auch die Verallgemeinerung der Torsion sowie des Krümmungsmaßes der Flächen.

Auf diesen, die allgemeinen metrischen Räume betreffenden Teil folgt eine eingehende Untersuchung der euklidischen und nicht-euklidischen Räume beliebiger Dimensionszahl sowie des Raums von *Hilbert*. Es handelt sich hier hauptsächlich um zwei Fragestellungen, nämlich einmal um das Problem der Einbettung (welche metrischen Räume sind zu einer Punktmenge eines der obgenannten speziellen Räume isometrisch?) und zweitens um die Aufgabe, die genannten Räume durch Eigenschaften ihrer Metrik zu kennzeichnen. Bei beiden Aufgaben spielt die Betrachtung gewisser Determinanten eine Rolle, die im einfachsten (euklidischen) Fall bereits von *Cayley* betrachtet und von *Menger* zur Lösung des Einbettungsproblems herangezogen wurden (*Cayley-Menger-*

sche Determinanten). Der Fall des sphärischen und elliptischen Raums erweist sich als verhältnismäßig kompliziert, während der Fall des hyperbolischen Raums große Analogie zum euklidischen Fall aufweist. Der Verf. bemerkt dabei, daß sich für eine weite Klasse von Räumen, die er als „verallgemeinerte hyperbolische" bezeichnet, die Theorie analog durchführen läßt, indem man in den betreffenden Determinanten (deren Elemente im hyperbolischen Fall die Hyperbelcosinus von Abständen sind), den Hyperbelcosinus durch eine weitgehend willkürliche reelle Funktion ersetzt.

Den Abschluß des Buches bildet eine Reihe von Anwendungen, die die Determinantentheorie, lineare Ungleichungen sowie die Verbandstheorie zum Gegenstand haben.

Es ist sehr erfreulich, daß die große Reihe von lehrbuchmäßigen Darstellungen moderner und bisher nur mühsam durch das Studium der sehr zerstreuten Literatur zugänglicher Gebiete, die uns in den letzten Jahren namentlich die angelsächsische Literatur beschert hat, nun wieder um dieses wertvolle und gut lesbare Buch bereichert wurde. *J. Radon*, Wien

Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Gamsid B. Mas'ud Al Kasi. Aus dem Arabischen übersetzt von *P. Luckey* †. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften; Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Heft 6.) Mit 5 Abb. und 57 Tafeln, VIII, 95 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950. $ 4.80.

Dies ist ein Beitrag zur Geschichte der arabischen Mathematik. Es handelt sich um eine Berechnung der Zahl π, welche von dem arabischen Gelehrten ein Jahrhundert vor *Ludolf* auf fünfzehn Dezimalen durchgeführt wurde. Die sehr interessanten Ausführungen, denen Erläuterungen des Übersetzers und auch das arabische Original beigegeben sind, werden für Historiker, Mathematiker und Arabisten in gleicher Weise von Bedeutung sein. *K. Prachar*, Wien

Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie. Von *W. Lietzmann*. 220 S. München: R. Oldenbourg. 1952. DM 19.50.

Der alte Routinier *Lietzmann* gibt in diesem Buch eine anschauliche Darstellung der mehrdimensionalen Geometrie. In seiner flüssigen, bisweilen humorvollen Schreibweise entwickelt er zuerst die Beziehungen im R_2 und R_3. Dann greift er auf R_4 und schließlich auf R_n über. Dabei bemüht sich *Lietzmann*, elementar zu bleiben. Das ist nicht immer möglich. Manchmal muß er, wie er selbst gesteht, sehr großzügig sein. Manchmal muß er sich bescheiden, bloß die Resultate anzugeben und für die Ableitung auf die vorhandene Literatur zu verweisen. Spezielle Vorkenntnisse werden für die Lektüre des Buches nicht vorausgesetzt, dafür aber eine weitgehende mathematische Bildung, wie man sie bei den Hörern der ersten Semester kaum erwarten kann.

Das Buch enthält viel und vielerlei. Um einen Überblick über das gebotene zu bieten, sollen einige Kapitelüberschriften schlagwortartig angeführt werden: Axiome der Geometrie, Simplex des vierdimensionalen Raumes, Kleins Erlanger Programm. Etwas Mengenlehre, Polytope, Kreisgebundene kollineare Darstellung von vierdimensionalen Polytopen, Satz von *Euler*. Lineare Gebilde in analytischer Darstellung, Orthogonalität, Parallelität. Metrik im R_4 und R_n. Etwas Trigonometrie, Regelmäßige Polytope, Schlegeldiagramme, Darstellende Geometrie des R_4. Hyperkugel, Aufteilung des Raumes durch regelmäßige Polytope, Zahlengitter, Anaglyphen, Nichteuklidische Geometrie, Raum, Zeit

und Welt in der Physik. Zusammenfassend kann gesagt werden daß das Buch eine wertvolle Bereicherung der vorhandenen Literatur, namentlich in methodischer Hinsicht darstellt. *J. F. Lewandowski*, Wien

Die geodätischen Linien und geodätischen Kreise der Rotationsflächen konstanter Krümmung. Von *F. Schilling*. In zwei Bänden. I. Band: V, 162 S. — II. Band: Mit 171 Abb., 188 S. München: R. Oldenbourg. 1953. DM 40.—.

Der Verf. hat sich bereits in einer Reihe früherer Werke eingehend mit der Geometrie der Flächen konstanter Krümmung befaßt. Seine 1941 abgeschlossenen Untersuchungen über die geodätischen Linien und Kreise auf den entsprechenden Drehflächen kommen infolge der Ungunst der Zeiten erst jetzt zur posthumen Veröffentlichung, und zwar in Form einer Vervielfältigung nach Maschinschrift.

Methodisch geht der Verf. so vor, daß er die Drehflächen isometrisch auf die mit der entsprechenden nichteuklidischen Maßbestimmung ausgestattete Ebene abbildet und die hier elementar gegebenen Kurven konstanter Krümmung auf die Fläche rücküberträgt. Das Schwergewicht liegt dabei auf der Gewinnung geeigneter konstruktiver Verfahren, die zu einer auch anschauungsmäßig befriedigenden Behandlung führen. Nebenher bedient sich der Verf. auch der isometrischen Abbildung auf die Kugel, die im Fall negativer Krümmung imaginären Radius besitzt. Theoretisch ist zwar diese Methode von der erstgenannten kaum verschieden, doch führt sie konstruktiv zu neuen Lösungen, wenn auch nicht in allen Fällen. Neben den reellen Drehflächen betrachtet der Verf. systematisch auch „Z-imaginäre Flächen", d. h. Flächen, die in der Form $Z = f(X\ Y)\,i$ mit reellen X, Y, f darstellbar sind und deren Bogenelement reell und positiv definit ausfällt, sobald man $fx^2 + fy^2 < 1$ fordert.

Mit großer Liebe hat sich der Verf. in alle Einzelheiten der gewonnenen Kurven vertieft und sie durch genau gezeichnete Figuren dargestellt. So dürfte das mit Absicht in möglichst elementarer Darstellung vorgeführte Material in hervorragender Weise als Übungsstoff für Studierende mittlerer Semester geeignet sein. *J. Radon*, Wien

Deuxième Colloque de Géometrie Algébrique. 243 S. Liège: G. Thone. — Paris: Masson & Co. 1952.

Das Buch enthält 13 Vorträge, die auf dem zweiten Kolloquium über algebraische Geometrie gehalten wurden. Das Kolloquium hat in der Zeit vom 9. bis 12. Juni 1952 in Liège stattgefunden und wurde vom „belgischen Zentrum für mathematische Forschung" veranstaltet. Im einzelnen wurden folgende Gegenstände behandelt: *O. Chisini* sprach über mehrfache Ebenen mit vorgegebener Verzweigungskurve und einen Zusammenhang mit der Theorie der Zöpfe. *L. Gautier* über die Klassifikation algebraischer Kurven durch projektive Modelle. *M. Villa* über den Zusammenhang von Punkttransformationen und Cremonatransformationen. *E. Kähler* über einen neuen Gesichtspunkt in der Theorie der algebraischen Körper. *P. Dolbeault* über meromorphe Differentialformen auf Kähler'schen Mannigfaltigkeiten. *F. Conforto* sprach über seine Forschungen auf dem Gebiete der abelschen Funktionen. Damit im Zusammenhang *A. Andreotti* über das Problem der Klassifikation der sogenannten irregulären algebraischen Flächen. *A. Néron* über die Gruppen von Divisoren auf algebraischen Mannigfaltigkeiten. *W. Gröbner* über die idealtheoretischen Methoden der algebraischen Geometrie. *F. Gaeta* referierte über neuere Resultate der Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten. *P. Burniat* über Modelle von kanonischen

Flächen des S_3 mit dem linearen Geschlecht zwischen 11 und 17. Den Begriff der quasiirreduziblen Kurve auf einer algebraischen Fläche behandelte *L. Nollet*. Das Referat von *L. Godeaux* beschäftigt sich mit den zyklischen Involutionen zu einer algebraischen Fläche.

Aus dieser kurzen Übersicht geht schon hervor wie vielfältig die Dinge sind über die hier gesprochen wurde. Die Arbeitsmethoden der algebraischen Geometrie, sowohl die geometrische als auch die abstrakt algebraische kommen in den Vorträgen gleichmäßig zum Ausdruck und es ist sicher, daß dieses Kolloquium viel dazu beitragen wird, die Forschungen über algebraische Geometrie zu fördern. *K. Prachar*, Wien

Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. Von *A. Timpe*. Zweite Auflage. VI, 217 S. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften. 1953. DM 17.80.

Die 1934 erschienene erste Auflage des Buches wurde beifällig aufgenommen und war nach wenigen Jahren vergriffen. Die Zeitumstände haben erst jetzt eine Neuauflage ermöglicht. Gegenüber der ersten Auflage sind eine größere Anzahl von Verbesserungen vorgenommen worden. Das Buch zeichnet sich durch leichte Lesbarkeit aus und ist Studenten, Ingenieuren, Versicherungsmathematikern, Statistikern und allen, die mit Wirtschaftsmathematik zu tun haben, sehr zu empfehlen. Inhaltlich seien besonders auf die Renten- und Versicherungsrechnung, auf Tilgungswesen und -anleihen, Tarifmathematik, Erfolgsrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und Analyse der Zeitreihen hingewiesen. *N. Hofreiter*, Wien

Advanced Statistical Methods in Biometric Research. Von *C. R. Rao*. VII, 390 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1952. $ 7.50.

Der bekannte indische Statistiker hat es unternommen einem Kreis von Wissenschaftlern, welche an der Anwendung schwierigerer statistischer Methoden interessiert sind, ein Lehrbuch an die Hand zu geben. Insbesondere wendet es sich wohl an die Biologen. Da aber auch dem Mathematiker etwas geboten werden soll, wird der Nichtmathematiker nur dann mit Erfolg das Buch benützen, wenn er gewisse Grundkenntnisse der mathematischen Statistik mitbringt und über einige Gewandtheit im abstrakten Denken verfügt. Die nötigen algebraischen Hilfsmittel findet er im Buche vor. Wenn anderseits der Mathematiker manchesmal eine noch schärfere Formulierung für möglich hält, wird er diese Konzession an den Praktiker angesichts der einwandfreien und inhaltsreichen Darstellung gerne hinnehmen. Varianzanalyse und Regressionstheorie werden vom einheitlichen Gesichtspunkt der kleinsten Fehlerquadrate dargeboten. Die *Fisher*sche Theorie der Schätzfunktionen und das *Likelihood*-Prinzip erfreuen sich einer anziehenden mathematischen Behandlung. Für das asyptotische Verhalten der *Likelihood*-Schätzungen folgt Verfasser *Cramér*. Es sind sogar die jüngeren Untersuchungen von *Wald* zitiert. Wir wollen aus dem reichen Material noch die Darbietung der *Neyman-Pearson*schen Theorie, *Fisher*'s diskriminatorische Funktion und vor allen Dingen den von der indischen Schule, besonders von *Mahalanobis* studierten Distanzbegriff von Grundgesamtheiten herausgreifen. Die zahlreichen Beispiele sind fast ausschließlich der Biologie und Biometrik entnommen. Die Darstellung entbehrt vielfach nicht einer gewissen Originalität. Hoffentlich wird das Buch auch hier bei den Anwendern der Statistik Eingang finden und so auch außerhalb der Mathematik eine Vorstellung von der Leistung der heutigen statistischen Methoden vermitteln. *L. Schmetterer*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden

Band XLVI: **Eindeutige analytische Funktionen.** Von Dr. **Rolf Nevanlinna,** Finnische Akademie, Honorarprofessor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 24 Abbildungen. X, 379 Seiten. 1953. DM 46.50; Ganzleinen DM 49.50.

Band LXIV: **Uniformisierung.** Von Dr. **Rolf Nevanlinna,** Finnische Akademie, Honorarprofessor an der Universität Zürich. Mit 22 Abbildungen. X, 391 Seiten. 1953. DM 46.50; Ganzleinen DM 49.50.

Band LIII: **Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen.** I. Teil: Elementare Quantenmechanik. Von Dr. **Siegfried Flügge,** o. Professor an der Universität Marburg, unter Mitarbeit von Dr. **Hans Marschall,** Marburg. Zweite, völlig neubearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 30 Abbildungen. VIII, 272 Seiten. 1952. DM 29.80; Ganzleinen DM 32.80.

Band LXV: **Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.** Von Dr. **L. Fejes Tóth,** o. Professor der Mathematik an der Universität Veszprém. Mit 124 Abbildungen. X, 197 Seiten. 1953. DM 24.—; Ganzleinen DM 27.—.

Band LXVI: **Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.** Auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt von **Ludwig Bieberbach.** IX, 338 Seiten. 1953. DM 36.—; Ganzleinen DM 39.60.

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik"

Herausgegeben von Prof. Dr. **F. Lösch,** Stuttgart-Cannstatt

Erstes Heft: **Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen.** Von Dr. habil. **H. Bückner,** Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. 1952. DM 18.60.

Zweites Heft: **Die konfluente hypergeometrische Funktion.** Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von **H. Buchholz,** apl. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, wissenschaftlicher Mitarbeiter und Referent beim Fernmeldetechnischen Zentralamt der deutschen Bundespost. Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten. 1953. DM 36.—.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10 % ermäßigten Vorzugspreis.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung